Signe d'une fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine de coefficient directeur m et d'ordonnée à l'origine p.

Cas 1 : Si $m > 0$

La fonction affine $f(x) = mx + p$ est strictement croissante et la droite la représentant coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{p}{m}$ (voir figure 1).

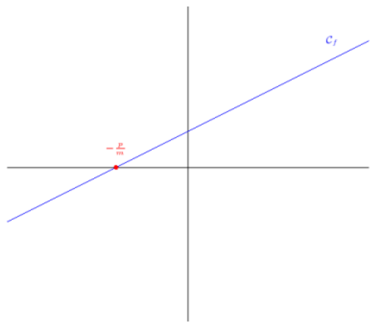


Figure 1 – Signe d'une fonction affine – cas $m > 0$

Le tableau de signes de la fonction f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
Signe de $mx + p$		$-$	0	$+$	

Cas 2 : Si $m < 0$

La fonction affine $f(x) = mx + p$ est strictement décroissante et la droite la représentant coupe l'axe des abscisses en $x = -\frac{p}{m}$ (voir figure 2).

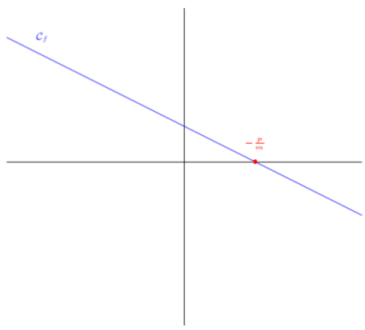


Figure 2 – Signe d'une fonction affine – cas $m < 0$

Le tableau de signes de la fonction f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
Signe de $mx + p$		$+$	0	$-$	

Exemples :

1. **Signe de** $(2x + 3)$

   Il faut d'abord déterminer la valeur pour laquelle le signe change :

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Comme le coefficient directeur est positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + 3$		$-$	0	$+$	

2. **Signe de** $(1-3x)$
   Il faut d'abord déterminer la valeur pour laquelle le signe change :

$$\begin{aligned} 1-3x &= 0 \\ -3x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   Comme le coefficient directeur est *négatif* , on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$+$	0	-	

3. **Signe de** $(2x+3)(1-3x)$
   Il suffit de mêler *dans un seul tableau* les résultats des deux exemples précédents en utilisant la règle des signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $1-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x+3)(1-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe d'un trinôme du second degré

Les résultats essentiels concernant l'étude des trinômes du second degré sont résumés dans le tableau 1.

Exemples :

1. Signe de $f(x) = -2x^2 + x - 4$
   On a $a = -2$, donc $a < 0$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 1 - 32 = -31$. $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de racines.
   f est donc toujours strictement du signe de a, donc toujours strictement négatif.
2. Signe de $f(x) = x^2 + 4x - 5$
   On a $a = 1$, donc $a > 0$.
   $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$. $\Delta > 0$, donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = \frac{-4-6}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$$

   f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé à a entre. On obtient le tableau 2.

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Table 2 – Un exemple d'étude de signe.

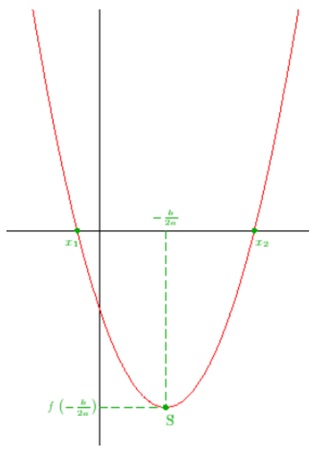
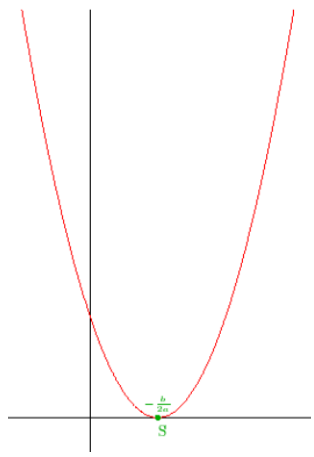
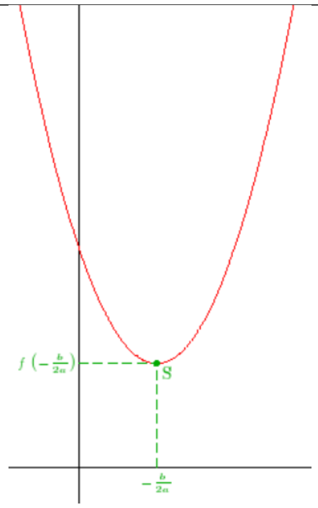
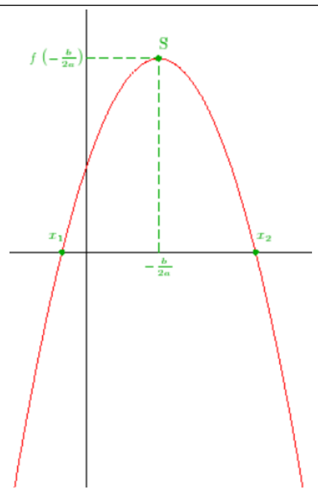
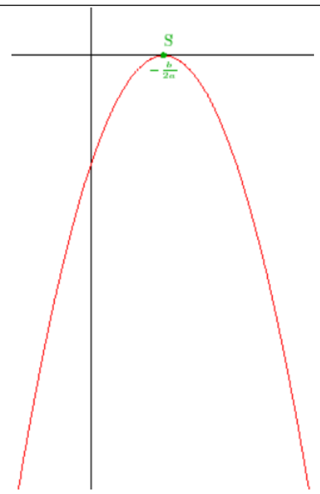
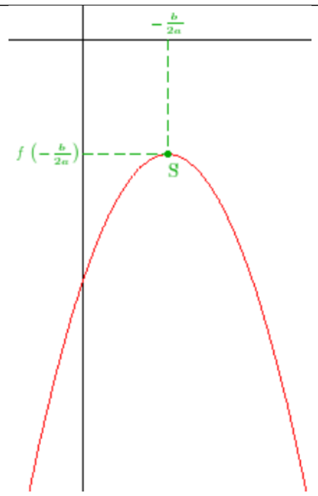
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de racine
Signe	du signe de a à l'extérieur des racines du signe opposé à a entre les racines	toujours du signe de a	toujours *strictement* du signe de a
Courbe représentative si $a > 0$			
Courbe représentative si $a < 0$			

Table 1 – Résultats essentiels sur les trinômes du second degré.