Second degré
Équations et inéquations

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2016/2017

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des algorithmes

1 Fonction trinôme du second degré

1.1 Définition et rappels sur le sens de variation

Définition : Un trinôme du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Exemples : Voici quelques trinômes du second degré

1. $x \longrightarrow 3x^2 - x + 1$
2. $x \longrightarrow -x^2 + \pi x - \sqrt{2}$
3. $x \longrightarrow (3x-2)(1-x)$
4. $x \longrightarrow -3x^2$

Le tableau 1 donne le sens de variations des fonctions polynômes du second degré.
On note $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

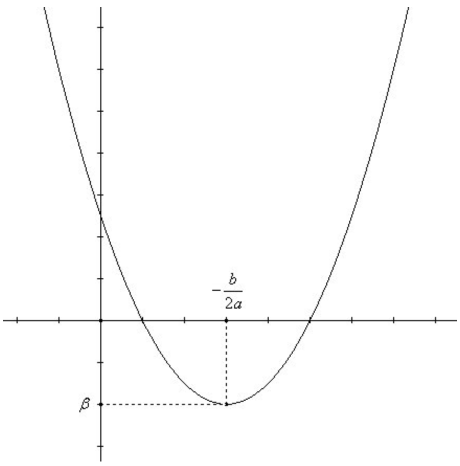
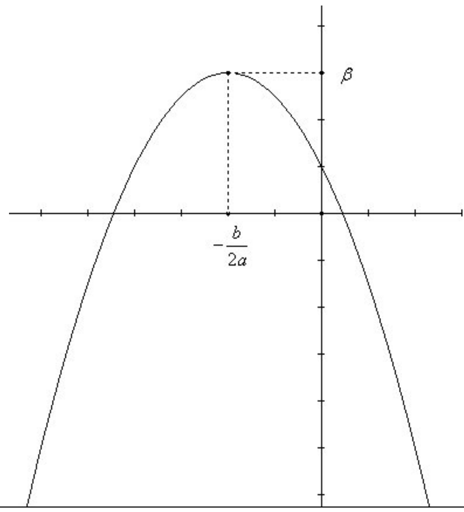
<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>Tableau de variations de f</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>β</td><td>$\nearrow$</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>β</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de f</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
</table>

TABLE 1 – Variations d'un trinôme du second degré

Remarques :

1. La courbe représentative d'un trinôme du second degré est appelée parabole.
2. Le sommet de la courbe est le point $S(\alpha\,;\beta)$.
   Si $a > 0$, elle est tournée vers le haut.
   Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.

Exercices : 69, 72 page 40[1] [TransMath]

1. Tableaux de variations de fonctions trinômes – Utilisation.

1.2 Forme canonique

Activité : Activité 1 page 23[2] [TransMath]

Forme canonique :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré.

1. On commence par mettre a en facteur (c'est possible, car $a \neq 0$).

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

2. On remarque que $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début de développement d'un carré :
   $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= \underline{x^2 + \frac{b}{a}x} + \frac{b^2}{4a^2}\end{aligned}$$

   On a donc :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

3. On utilise cette forme pour terminer la transformation de f :

$$\begin{aligned}f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

On a donc :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cette forme est appelée forme canonique du trinôme f.

Remarques :

1. Il est inutile de connaître cette formule par cœur. Il faut par contre se souvenir de la méthode, pour pouvoir, sur des exemples, trouver la forme canonique.
2. On a montré que toute fonction trinôme du second degré f peut se mettre sous forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Le point $S\ (\alpha\,;\ \beta)$ est alors le sommet de la parabole.

Exercices : 1 page 28 et 43 page 38[3] – 2 page 28 ; 27 page 34 et 44 page 38[4] – 3 page 28 et 45 page 38[5][TransMath]

2. Résolution d'équations du second degré
3. Forme canonique
4. Application à des problèmes de recherche d'extremums.
5. Factorisation à l'aide de la forme canonique.

2 Équation du second degré

Activité : Activité 2 page 23 [6] et exercice 31 page 36 [7][TransMath]

2.1 Discriminant

On va utiliser la forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

> **Définition :** On note $\Delta = b^2 - 4ac$.
> Δ est appelé discriminant du trinôme.
> La forme canonique peut alors s'écrire :
>
> $$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

— Si $\Delta > 0$:
On a alors $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$, on peut donc écrire : $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ d'où :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} &= 0 & \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} &= 0 \\ x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} & & x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} & \\ x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & & x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \end{aligned}$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ a alors deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$:
La forme canonique devient :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

6. Fonction trinôme et parabole.
7. Utilisation de la calculatrice.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a alors une seule solution :

$$x_0 \quad = \quad -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$:
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= 0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0 \qquad (\text{car } a \neq 0) \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Or, comme $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.
Un carré étant toujours positif : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.
Cette équation est donc impossible.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a alors aucune solution.

Résumé : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de cette équation.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution.

Exemples :

1. $-6x^2 + x + 1 = 0$
   On a : $a = -6$; $b = 1$ et $c = 1$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 1 + 24 = 25$.
   Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions :
   $x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-6)} = \frac{-1-5}{-12} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$
   $x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-6)} = \frac{-1+5}{-12} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3}$

   $$S = \left\{-\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right\}$$

2. $5x^2 + 6x + 2 = 0$
   On a $a = 5$; $b = 6$ et $c = 2$.
   $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = 36 - 40 = -4$.
   Comme $\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solution.

   $$S = \emptyset$$

3. $x^2 - 14x + 49 = 0$
   On a $a = 1$; $b = -14$ et $c = 49$.
   $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 49 = 196 - 196 = 0$.
   Comme $\Delta = 0$, cette équation admet une seule solution : $x_0 = -\frac{-14}{2\times1} = 7$

   $$S = \{7\}$$

Remarque : On peut trouver plus rapidement le résultat du dernier exemple en remarquant que :

$$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

Il n'est donc pas toujours judicieux d'utiliser le discriminant, notamment dans les cas où il est possible de factoriser.

Exercices : 4, 5 page 29 et 46, 47, 48, 50, 51, 52, 54 page 38 [8] – 62 page 39 ; 71 page 40 et 108 page 45 [9] – 6 page 29 ; 59, 63, 64, 66 page 39 et 102, 104 page 44 [10] – 55, 56 page 38 ; 57 page 39 et 94 page 43 [11] – 28 page 34 et 86 page 42 [12] – 87, 88, 89 page 42 [13] [TransMath]

2.2 Un algorithme de résolution d'équations du second degré

Activité : TP 32 page 37 [14] [TransMath]

On peut remarquer que la méthode du 2.1 pour déterminer les racines d'un trinôme du second degré est algorithmique. L'algorithme 1 permet cette résolution.

Algorithme 1 Résolution d'équations du second degré

```
Variables
    a,b,c,Delta,x0,x1,x2: nombres réels
Entrée
    Saisir a,b,c
Traitement
    Delta reçoit b²-4ac
    Si (Delta < 0) Alors Afficher « L'équation n'a aucune solution »
    Si (Delta = 0)
        Alors
            x0 reçoit -b/2a
            Afficher « L'équation a une seule solution : x0= », x0
    Fin Si
    Si (Delta > 0)
        Alors
            x1 reçoit (-b-√Delta)/2a
            x2 reçoit (-b+√Delta)/2a
            Afficher « L'équation a deux solutions : x1= », x1, «  et x2= », x2
    Fin Si
```

Remarques :

1. Il est possible d'améliorer cet algorithme pour qu'il renvoie un message d'erreur si la valeur entrée pour la variable a est nulle.
2. Cet algorithme a été implémenté sous AlgoBox et sous Python. Les fichiers correspondants sont `trinome.alg` et `trinome.py`.

8. Résolutions d'équations du second degré.
9. Utilisation pour des fonctions.
10. Autres applications.
11. Avec un paramètre.
12. Avec paramètres, plus difficiles.
13. Un ROC et es applications.
14. Un algorithme pour résoudre une équation du second degré.

2.3 Factorisation d'un trinôme du second degré

On peut déduire de l'étude menée au 2.1 la propriété suivante :

Propriété : Factorisation des trinômes du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

— Si $\Delta > 0$, f se factorise en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

x_1 et x_2 sont appelés racines du trinôme f.

— Si $\Delta = 0$, f se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

x_0 est appelé racine double du trinôme f.

— Si $\Delta < 0$, f ne se factorise pas.

Remarque : Le cas où $\Delta < 0$ est admis.

Exercices : 53 page 38 et 68 page 40[15] [TransMath]

3 Signe du trinôme

Activité : Exercices 67 page 40 et 81 page 41[16] [TransMath]

3.1 Si $\Delta > 0$

On a alors deux racines distinctes $x_1$et x_2. On a vu au 2.3 que l'on peut alors factoriser f :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Pour simplifier, on supposera que $x_1 < x_2$. On obtient le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

Pour résumer :

Propriété 1 : Si $\Delta > 0$, f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé à a entre les racines.

3.2 Si $\Delta = 0$

On a alors une seule racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$. On a vu au 2.3 que l'on peut alors factoriser f :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Comme un carré est toujours positif et que f s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$, on a le tableau de signes suivant :

15. Factorisation.
16. Une approche graphique.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$a(x-x_0)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

Pour résumer :

Propriété 2 : Si $\Delta = 0$, f est toujours du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3.3 Si $\Delta < 0$

Il n'y a pas de racine et on a vu au 2.1 que :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Or :
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ (c'est un carré) ;
- comme $\Delta < 0$, $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

Par suite, l'expression entre crochets est toujours *strictement* positive. f est donc toujours *strictement* du signe de a.

Remarque : On peut montrer que, dans ce cas, on ne peut pas factoriser f.

Pour résumer :

Propriété 3 : Si $\Delta < 0$, f est toujours *strictement* du signe de a.

Exercices : 7, 8 page 30 et 73, 74 page 41 [17] – 10, 11 page 31 ; 18, 19, 20, 21 page 32 et 75, 76, 78, 79, 80 page 41 [18] – 12 page 31 ; 16, 17 page 32 ; 26 page 34 et 97 page 43 [19] – 14 page 31 ; 82 page 41 ; 105 page 44 et 107, 109, 110 page 45 [20] – 13 page 31 [21] – 83 page 41 et 101 page 44 [22] – 93, 95 page 43 [23] [TransMath]

3.4 En résumé...

Les résultats essentiels concernant l'étude des trinômes du second degré sont résumés dans le tableau 2.

Références

[TransMath] transMATH 1$^{\text{re}}$S, édition 2011 (Nathan)

2, 3, 4, 6, 7, 8

17. À l'aide d'une factorisation.
18. Signe du trinôme, résolution d'inéquations.
19. Applications aux fonctions
20. Autres applications.
21. Identifier un trinôme.
22. Algorithmique.
23. Avec un paramètre.

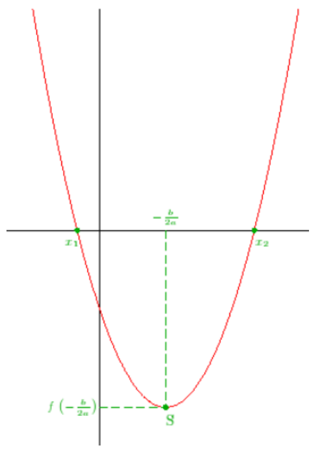
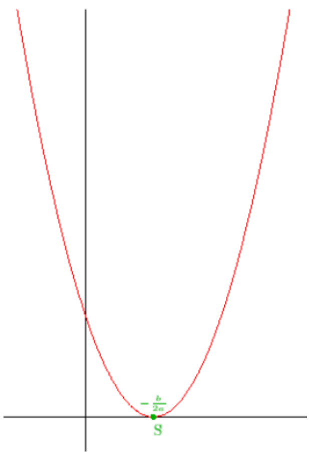
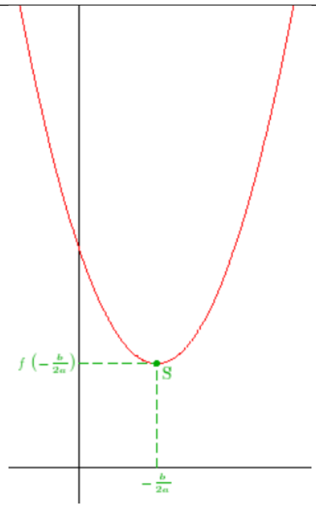
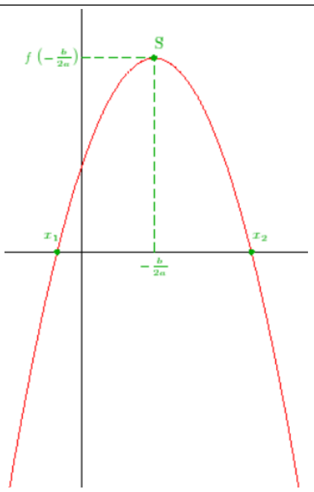
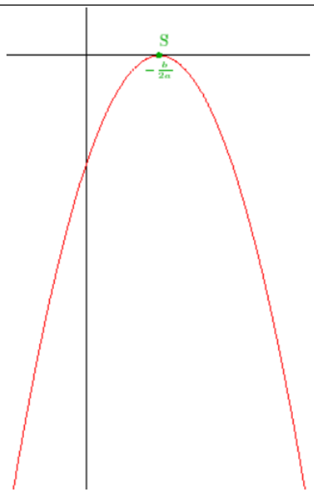
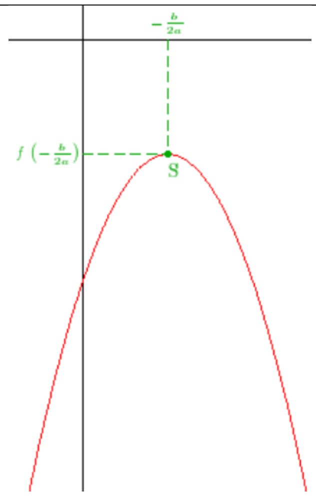
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines	deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de racine
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de factorisation
Signe	du signe de a à l'extérieur des racines du signe opposé à a entre les racines	toujours du signe de a	toujours *strictement* du signe de a
Courbe représentative si $a > 0$			
Courbe représentative si $a < 0$			

TABLE 2 – Résultats essentiels sur les trinômes du second degré.