Dérivation
Tangente à une courbe

Année scolaire 2016/2017

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

En préliminaire :

Activité : Activité page 73 [TransMath]

1 Tangente et nombre dérivé

Dans toute la suite, on considère une fonction f définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1.1 Notion de tangente à une courbe

Soit a de l'intervalle I et h un réel.
On note $A\ (a\,;\,f\,(a))$ et $M\ (a+h\,;\,f\,(a+h))$. (voir figure 1)

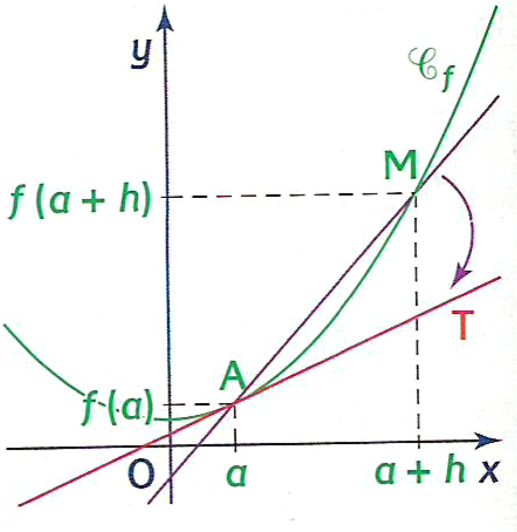

FIGURE 1 – Sécante à une courbe

La sécante (AM) à la courbe $\mathcal{C}_f$ a comme coefficient directeur :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{a+h-a} = \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

Ce nombre est appelé taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.

On appelle tangente T à la courbe représentant f en A (si elle existe), la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A (en restant sur la courbe).
Ce qui revient à dire que h *tend vers zéro*. Le coefficient directeur m de la tangente (s'il existe) sera alors la limite quand h tend vers zéro du taux d'accroissement, ce qui est noté :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

1.2 Nombre dérivé – Exemples

Définition : Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre *fini* lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est dérivable en a.
Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en a. On le note $f'\,(a)$.
On a donc :

$$f'\,(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h}$$

Remarque : Le nombre dérivé de f en a est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$.
   Montrons que f est dérivable en $a = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{3(1+h)^2 + 4(1+h) - 5 - 2}{h} \\
&= \frac{3\left(1 + 2h + h^2\right) + 4 + 4h - 7}{h} \\
&= \frac{3 + 6h + 3h^2 + 4 + 4h - 7}{h} \\
&= \frac{10h + 3h^2}{h} = 10 + 3h
\end{aligned}$$

   Par suite, $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 10$.
   Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 10$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$ et soit a un réel.

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-(a+h)^2 + 3 - \left(-a^2 + 3\right)}{h} \\
&= \frac{-\left(a^2 + 2ah + h^2\right) + 3 + a^2 - 3}{h} \\
&= \frac{-a^2 - 2ah - h^2 + a^2}{h} \\
&= \frac{-2ah - h^2}{h} = -2a - h
\end{aligned}$$

   Par suite, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -2a$.
   Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = -2a$.

Exercices : 1, 2, 3 page 77 ; 30, 31 page 84 et 33 page 85 [1] – 22, 23, 24, 28, 29 page 84 [2] – 17 page 83 [3] – 44 page 85 [4] – 64 page 89 [5] [TransMath]

1.3 Équation de la tangente à une courbe

On reprend la figure 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite :
- de coefficient directeur $m = f'(a)$;
- passant par $A\,(a\,;\,f(a))$.

L'équation de T est de la forme : $y = f'(a).x + p$.
De plus, la tangente passe par le point A donc : $f(a) = f'(a) \times a + p$. On a donc $p = f(a) - f'(a) \times a$

L'équation de T est donc :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a).x + f(a) - f'(a) \times a \\
&= f'(a).x - f'(a).a + f(a) \\
&= f'(a)(x - a) + f(a)
\end{aligned}$$

1. Détermination graphique du nombre dérivé.
2. Calcul de nombre dérivé.
3. Utilisation de la calculatrice.
4. Algorithmique.
5. Déterminer une fonction dérivée.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercices : 35, 38, 39, 40 page 85 [6] [TransMath]

2 Fonction dérivée

2.1 Notion de fonction dérivée

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$.
On a vu au 1.2 que f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et que $f'(a) = -2a$.
Ce résultat étant valable pour *tout* a, on dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on appelle *fonction* dérivée la fonction $f' : x \longrightarrow -2x$.

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle I.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle I la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f'.

Remarque : Dire qu'une fonction est dérivable signifie qu'il existe des tangentes à tout point de la courbe la représentant. Par contre, la fonction dérivée n'a plus de lien avec la tangente en un point.

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

2.2.1 Fonction affine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.
En tout point $a \in \mathbb{R}$, elle sa courbe représentative est sa propre tangente. Elle est donc dérivable en a et $f'(a) = m$.

Toute fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = m$.

Cas particuliers :

- *Fonction constante* (de la forme $f(x) = k$)
  Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur dérivée est $f'(x) = 0$.
- *Fonction identité* ($f(x) = x$)
  Elles est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 1$.

2.2.2 Fonction carrée – Fonctions trinômes du second degré

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah - h^2}{h} = 2a + h \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$.
Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$.

La fonction carrée $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

6. Détermination d'équation de tangentes.

Remarque : Par un raisonnement analogue, on peut montrer que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $f'(x) = 2ax + b$.

2.2.3 Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} \\ &= \frac{1}{h} \times \frac{-h}{a(a+h)} = -\frac{1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{1}{a^2}$.

Donc f est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2.2.4 Autres fonctions usuelles

On démontre, par un type de raisonnement analogue aux précédents, des résultats équivalents pour d'autres fonctions usuelles.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles

Exercices : 4, 5, 6 page 78 et 36, 37, 39 page 85 [7] – 11 page 80 ; 40, 41 page 85 ; 45, 46 page 86 et 58 page 88 [8] – 12 page 80 ; 42 page 85 et 62 page 88 [9] – 13 page 80 et 48 page 86 [10] – 49, 51 page 86 [11] – 55 page 87 [12] – 59, 61 page 88 [13][TransMath]

7. Équation de tangente.
8. Déterminer des tangentes.
9. Tangentes communes à deux courbes.
10. Positions relatives d'une courbe et de sa tangente.
11. Détermination de fonctions.
12. R.O.C.
13. Problèmes concrets.

Références

[TransMath] transMATH 1^{re}S, édition 2011 (Nathan)

2, 3, 4, 5