Variations
des fonctions associées

Année scolaire 2016/2017

Table des matières

Table des figures

1 Quelques rappels

1.1 Sens de variation d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

— On dit que f est **croissante** sur l'intervalle I si :

$$\text{Pour tout } a,\, b \in I, \text{ si } a \leq b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

Ce qui signifie que f conserve l'ordre (voir figure 1).

— On dit que f est **décroissante** sur l'intervalle I si :

$$\text{Pour tout } a,\, b \in I, \text{ si } a \leq b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

Ce qui signifie que f inverse l'ordre (voir figure 2).

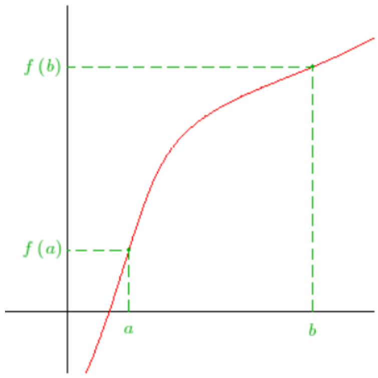

FIGURE 1 – Fonction croissante

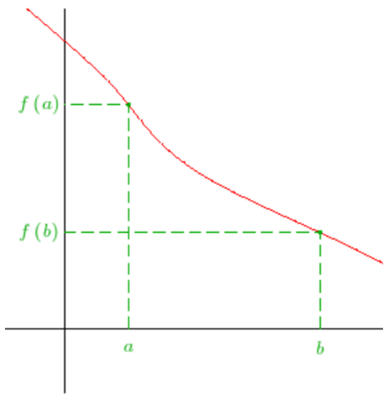

FIGURE 2 – Fonction décroissante

Remarque : Avec des inégalités strictes, on dit que f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition : Si une fonction f est soit toujours (strictement) croissante, soit toujours (strictement) décroissante sur un intervalle I, on dit que f est (strictement) **monotone** sur l'intervalle I.

1.2 Fonctions affines

Propriété : Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.
- Si $m > 0$ alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $m = 0$ alors la fonction f est constante.
- Si $m < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante.

1.3 Fonction carrée

Propriété : La fonction carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ (voir figure 3).
La courbe représentative de la fonction carrée est une parabole.

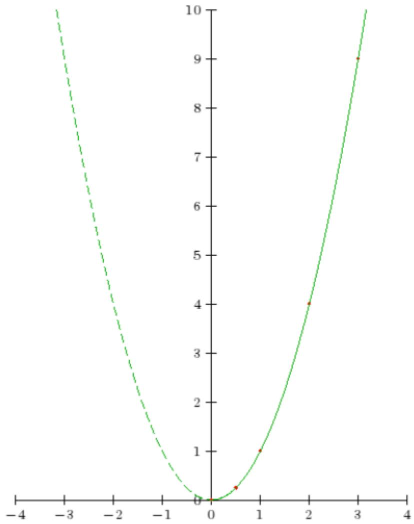

FIGURE 3 – Courbe représentative de la fonction carrée

1.4 Fonction inverse

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ (voir figure 4).
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.

Remarques :
1. La courbe représentative de la fonction inverse ne touche aucun des axes de coordonnées. Par contre, elle s'en rapproche indéfiniment...
2. Il est faux de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Par exemple, $-3 < 2$ et $\frac{1}{-3} < \frac{1}{2}$. L'ordre n'est ici en aucun cas inversé...
On ne peut de toute façon étudier les variations d'une fonction que sur un intervalle.

Exercices : 2, 3, 4 page 48 [1] – 76 page 67 [2] – 77 page 67 [3] [TransMath]

1. Variations des fonctions usuelles.
2. Utilisation de la fonction inverse.
3. Algorithmique.

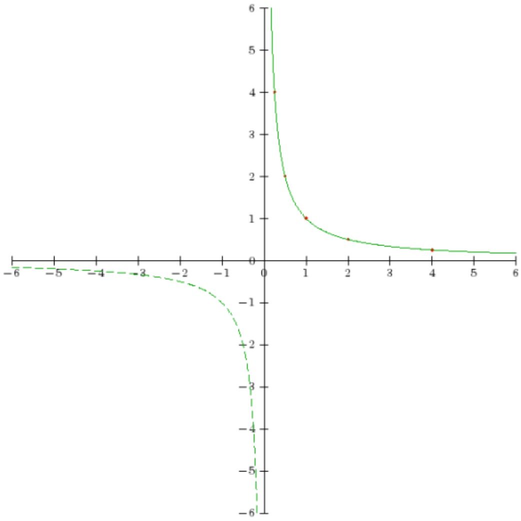

FIGURE 4 – Courbe représentative de la fonction inverse

2 La fonction racine carrée

2.1 Définition

Définition : Soit x un nombre réel positif. Il existe un unique nombre positif dont le carré est x. Ce nombre est appelé racine carré de x et est noté $\sqrt{x}$.
On appelle fonction racine carrée la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$. Est elle donc définie sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques : 1. On déduit facilement de cette définition que , si $x \geq 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$.

2. Attention ! Le deuxième résultat n'est pas valable si $x < 0$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Pour un résultat plus général, voir [TransMath].

2.2 Sens de variation – Courbe représentative

Propriété : Le fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration :
Soient $a, b \in [0\,;+\infty[$ tels que $0 \leq a < b$. On a donc $\sqrt{b} + \sqrt{a} \neq 0$ et :

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

Comme $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{b} > 0$, $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$.
Comme $a < b$, $b - a > 0$.
Par suite, $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$, soit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Globalement, l'ordre est conservée, donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques : 1. Cette démonstration utilise une multiplication par la quantité conjuguée pour conclure. Cette méthode est souvent utilisée en présence de racines carrées.

2. Le tableau de variations de la fonction racine carrée est le suivant :

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

3. Le tableau de valeurs suivant permet de tracer la courbe de la fonction racine carrée (voir figure 5).

x	0	$1/4$	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	$1/2$	1	2	3

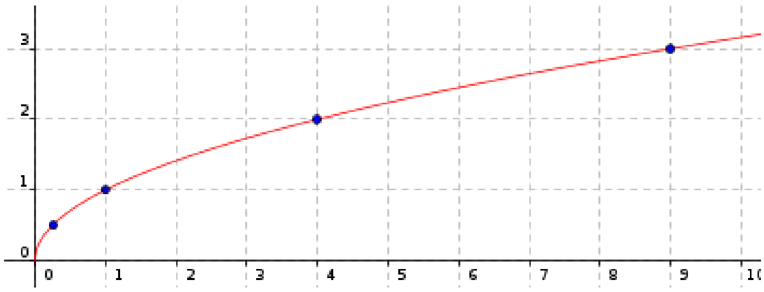

FIGURE 5 – Courbe représentative de la fonction racine carrée

Exercices : 66 page 65 [4] [TransMath]

2.3 Comparaison de x, $\sqrt{x}$ et x^2 (pour x positif)

Les fonctions $x \longrightarrow x$; $x \longrightarrow x^2$ et $x \longrightarrow \sqrt{x}$ ont le même tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$. De plus, par ces trois fonctions, l'image de 1 est 1. Il est donc légitime de se poser la question de leurs positions relatives.

Théorème : On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les courbes représentatives respectives des fonctions $x \longrightarrow x$; $x \longrightarrow x^2$ et $x \longrightarrow \sqrt{x}$ sur $[0\,;\,+\infty[$ voir figure 6).

- Les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,1)$ sont communs aux trois courbes ;
- Sur $]0\,;\,1[$, $\mathcal{C}_2$ est au-dessous de $\mathcal{C}_1$, elle-même en dessous de $\mathcal{C}_3$;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $\mathcal{C}_3$ est au-dessous de $\mathcal{C}_1$, elle-même en dessous de $\mathcal{C}_2$.

Autrement dit :

- Sur $]0\,;\,1[$, $0 < x^2 < x < \sqrt{x}$;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $0 < \sqrt{x} < x < x^2$.

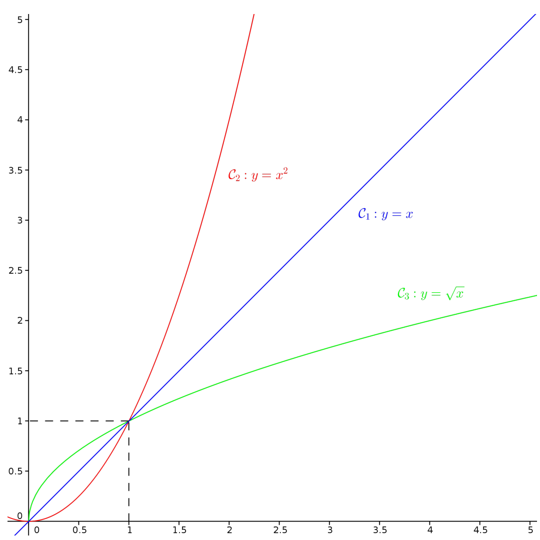

FIGURE 6 – Fonctions $x \longrightarrow x$; $x \longrightarrow x^2$ et $x \longrightarrow \sqrt{x}$

4. Une propriété de la fonction racine carrée.

Démonstration :
Positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$: $d_1(x) = x^2 - x = x(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$d_1(x)$	0	$-$	0	$+$	

Donc, sur $]0\,;1[$, $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de $\mathcal{C}_1$ et sur $]1\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_2$ est au-dessus de $\mathcal{C}_1$.
Positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$: $d_2(x) = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$
Comme la fonction racine carrée est croissante et que $\sqrt{1} = 1$:
Si $x < 1$, $\sqrt{x} < 1$ donc $\sqrt{x} - 1 < 0$;
Si $x > 1$, $\sqrt{x} > 1$ donc $\sqrt{x} - 1 > 0$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
$d_2(x)$	0	$-$	0	$+$	

Donc, sur $]0\,;1[$, $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de de $\mathcal{C}_3$ et sur $]1\,;+\infty[$, $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_3$.

Remarques : 1. Comme dans cette démonstration, on utilise souvent l'étude du signe de la différence pour déterminer les positions relatives de deux courbes.
2. On peut montrer que, dans un repère orthonormé, les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{C}_1$.

Exercices : 41 page 62[5] – 67 page 65 et 93 page 69[6] [TransMath]

3 Sens de variation des fonctions associées

Activité : Activité page 49[7] [TransMath]

3.1 Variations de $x \longrightarrow u(x) + k$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel fixé.
On note v la fonction définie sur I par $v(x) = u(x) + k$.
Les fonctions u et v ont le même sens de variations sur I.

Démonstration (partielle) :
On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.
Soit a, $b \in I$, avec $a \leq b$. On a alors $u(a) \leq u(b)$.
Par suite, $u(a) + k \leq u(b) + k$, d'où $v(a) \leq v(b)$.
La fonction v est donc croissante sur l'intervalle I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante sur l'intervalle I.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u par une translation verticale de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.
La fonction f a les mêmes variations que la fonction carrée. Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$

La courbe représentative de f se déduite de celle de la fonction carrée par une translation de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (voir figure 9).

5. Passage à l'inverse.
6. Positions relatives de courbes.
7. Des paraboles et des opérations.

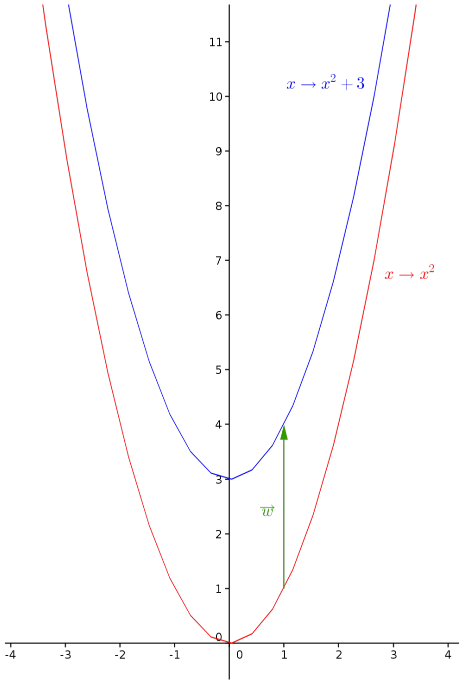

FIGURE 7 – Fonctions $x \longrightarrow x^2$ et $x \longrightarrow x^2 + 3$

3.2 Variations de λu, avec $\lambda \neq 0$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel fixé non nul.
On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \lambda u(x)$.
— Si $\lambda > 0$, les fonctions u et v ont le même sens de variations sur I.
— Si $\lambda < 0$, les fonctions u et v ont des sens de variations contraires sur I.

Démonstration (partielle) :
On suppose que u est croissante sur l'intervalle I et $\lambda < 0$.
Soit a, $b \in I$, avec $a \leq b$. On a alors $u(a) \leq u(b)$.
Comme $\lambda < 0$, $\lambda u(a) \geq \lambda u(b)$, d'où $v(a) \geq v(b)$.
La fonction v est donc décroissante sur l'intervalle I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u en multipliant toutes les ordonnées par λ.

Exemples : — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{3}x^2$.
Comme $\frac{4}{3} > 0$, la fonction f a les mêmes variations que la fonction carrée. Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Comme $-\frac{1}{2} < 0$, la fonction g a un sens de variation contraire à la fonction carrée. Son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sur la figure 8.

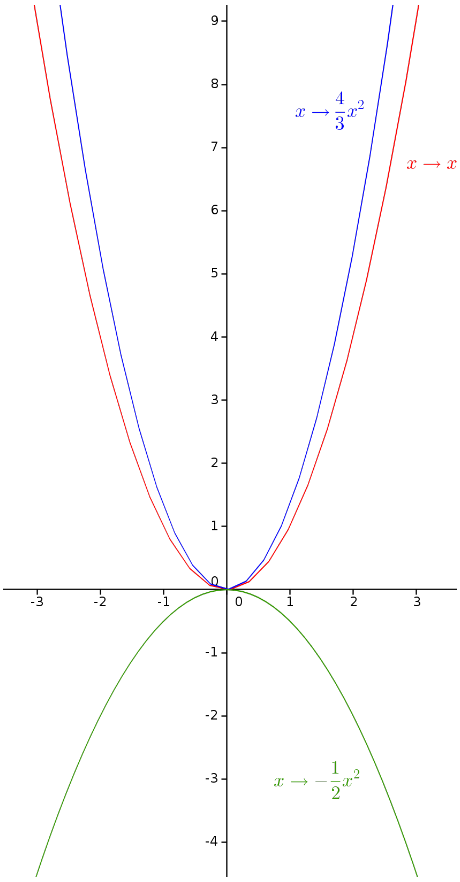

FIGURE 8 – Fonctions $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow \frac{4}{3}x^2$ et$x \longrightarrow -\frac{1}{2}x^2$

Exercices : 13 page 56 et ; 50, 57, 58 page 64 [8] – 40, 42 page 62 [9] – 43 page 63 [10] – 16 page 56 et 46 page 63 [11] [TransMath]

Remarque : Attention ! Il n'existe pas de résultat général sur la somme et le produit de deux fonctions (voir module).

Module : Exercice 25 page 60 [12] ; 26 page 61 [13] et 74 page 67 [14] [TransMath]

3.3 Variations de $1/u$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$ et le signe de u est constant sur I.
On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \frac{1}{u(x)}$.
Les fonctions u et v ont des sens de variations contraires sur I.

Démonstration (partielle) :
On suppose que u est croissante et strictement négative sur l'intervalle I.
Soit $a, b \in I$, avec $a \leq b$. On a alors $u(a) \leq u(b) < 0$.
Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$, on a $\frac{1}{u(a)} \geq \frac{1}{u(b)}$, d'où $v(a) \geq v(b)$.
La fonction v est donc décroissante sur l'intervalle I.

8. Variations de fonctions associées.
9. Reconnaissance de courbes.
10. Construction de courbes.
11. Avec la fonction racine carrée.
12. Étude de la somme de deux fonctions monotones.
13. Étude du produit de deux fonctions monotones.
14. Produit de fonctions monotones et positives.

Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \frac{1}{-2x+4}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = -2x + 4$.

u est une fonction affine strictement décroissante dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	

— Sur $]-\infty\,;\,2[$, u est strictement décroissante et strictement négative donc f est strictement croissante ;

— Sur $]2\,;\,+\infty[$, u est strictement décroissante et strictement positive donc f est strictement croissante.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$	

La courbe représentative de la fonction f est tracée sur la figure 9.

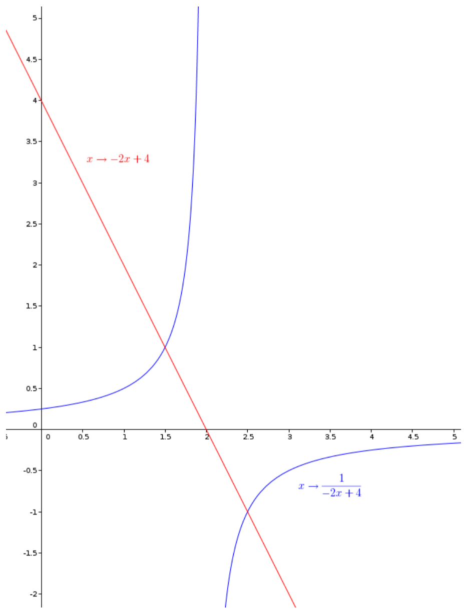

FIGURE 9 – Fonctions $x \to -2x + 4$ et $x \to \frac{1}{-2x+4}$

Exercices : 7, 8, 10 page 55 et 30 page 62 [15] – 15 page 56 et 52 page 64 [16] – 33 page 62 [17] – 37, 38 page 62 [18] – 22 page 58 et 70 page 66 [19] – 71 page 66 [20] [TransMath]

3.4 Variations de $\sqrt{u}$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \geq 0$.

On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \sqrt{u(x)}$.

Les fonctions u et v ont le même sens de variations sur I.

Démonstration (partielle) :

On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.

Soit a, $b \in I$, avec $a \leq b$. On a alors $0 \leq u(a) \leq u(b)$.

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$, d'où $v(a) \leq v(b)$.

La fonction v est donc croissante sur l'intervalle I.

15. Fonctions de la forme $\frac{1}{u}$.
16. Fonctions associées.
17. Encadrements.
18. Reconnaissance de courbes.
19. Utilisation d'une identification.
20. ROC.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante sur I.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-2x+4}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = -2x + 4$.

u est une fonction affine strictement décroissante dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		2
$f(x)$		$\searrow$	0

La courbe représentative de la fonction f est tracée sur la figure 10.

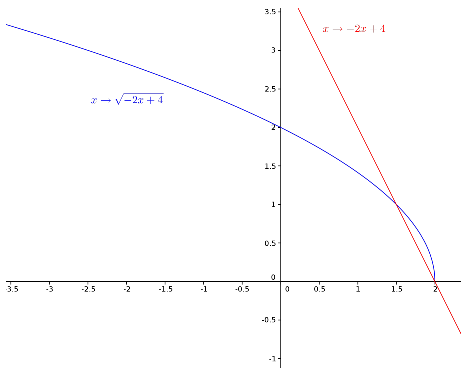

FIGURE 10 – Fonctions $x \to -2x+4$ et $x \to \sqrt{-2x+4}$

Exercices : 1, 2, 3, 5, 6 page 54 ; 29 page 62 ; 47, 48 page 63 et 51, 56, 61, 62 page 64 [21] – 11, 12 page 55 et 54 page 64 [22] – 31, 32, 36 page 62 [23] – 39 page 62 [24] – 21 page 58 ; 68, 69 page 65 et 78 page 67 [25] – 84, 85, 87, 90, 91 page 68 et 95 page 69 [26] [TransMath]

4 La fonction valeur absolue

4.1 Définition

Définition : La valeur absolue d'un nombre x positif est lui-même. La valeur absolue d'un nombre x négatif est son opposé.

On note $|x|$ la valeur absolue d'un nombre x. On a donc :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|3,2| = 3,2$ $\quad|-4| = 4$ $\quad|3+\pi| = 3+\pi$ $\quad\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = -1+\sqrt{2}$ car $1-\sqrt{2} <$

Remarque : La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

21. Fonctions $\sqrt{u}$.
22. Fonctions associées.
23. Comparaisons. Encadrements.
24. Reconnaissance de courbes.
25. Modéliser une situation.
26. Équations et inéquations irrationnelles.

Propriétés : Soit x un nombre réel.

— $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
— $|-x| = |x|$
— $\sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration :
Les deux premières assertions sont des conséquences directes de la définition.
$\sqrt{x^2}$ est le nombre positif dont le carré est x^2.
Or, $|x| \geq 0$ et, comme $|x|$ est égal soit à x, soit à $(-x)$, on a $|x|^2 = x^2$.
Par suite, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

4.2 Sens de variation – Courbe représentative

La fonction valeur absolue $x \to |x|$ est une fonction affine par morceaux :
— Sur $]-\infty\,;\,0]$, elle coïncide avec la fonction affine décroissante $x \to -x$;
— Sur $[0\,;\,+\infty[$, elle coïncide avec la fonction affine croissante $x \to x$.
On en déduit les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : La fonction valeur absolue $x \to |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est :
— strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$;
— strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Remarque : Le tableau de variations de la fonction valeur absolue est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Propriété 2 : La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion de deux demi-droites. Dans un repère orthogonal, cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (voir figure 11)

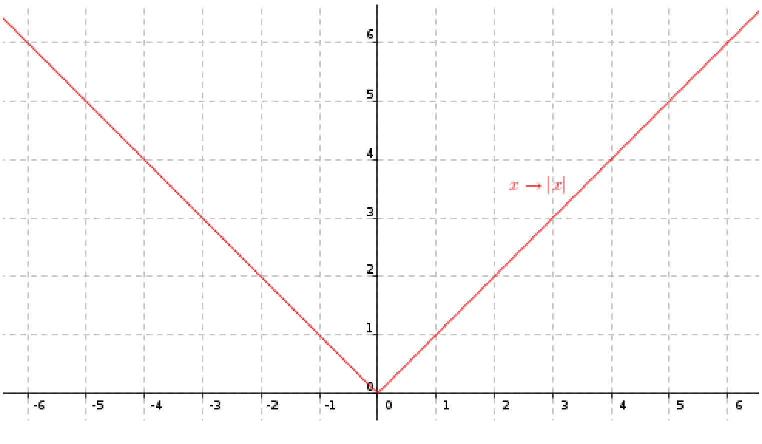

FIGURE 11 – Courbe représentative de la fonction valeur absolue

Exercices : 4 page 54 ; 9 page 55 ; 14 page 56 et 55 page 64 [27] – 34, 35 page 62 [28] – 79, 80, 81, 82, 83 page 68 et 44, 45, 49 page 63 [29] [TransMath]

27. Fonctions associées.
28. Encadrements.
29. Construction de courbes.

Références

[TransMath] transMATH 1^{re}S, édition 2011 (NATHAN)

4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12