Colinéarité de vecteurs
Équation cartésienne d'une droite

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2016/2017

Table des matières

Table des figures

Activité : *Rappels sur les vecteurs* (sur feuille polycopiée)

1 Rappels sur les vecteurs

1.1 Égalité de deux vecteurs

Différentes façons d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, où A et B sont deux points non confondus (voir figure 1) :

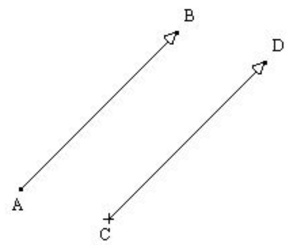

FIGURE 1 – Vecteurs égaux

1. Par une figure connue :
   AB**DC** est un parallélogramme.
2. En termes de milieux :
   $[AD]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu.
3. Par les caractéristiques des vecteurs :
   — $(AB) \parallel (CD)$, c'est-à-dire que les vecteurs ont même direction ;
   — on va de A vers B comme de C vers D, c'est-à-dire que les vecteurs ont même sens ;
   — $AB = CD$, c'est-à-dire que les vecteurs ont même longueur ou norme.

1.2 Somme de deux vecteurs

Propriété 1 : Pour tous les points A, B, C du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Cette relation est appelée relation de CHASLES. (voir figure 2)

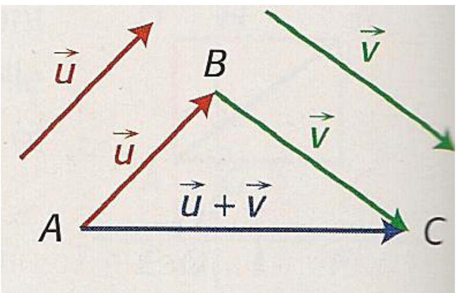

FIGURE 2 – Relation de CHASLES

Remarque : L'égalité de *longueurs* $AB + BC = AC$ est en général fausse.

Propriété 2 : Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. (voir figure 3)
Le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

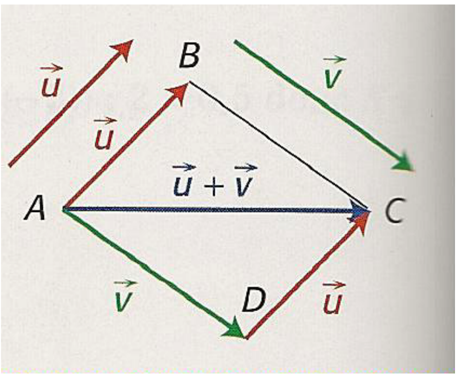

FIGURE 3 – Somme de deux vecteurs de même origine

Remarques : 1. La **propriété 1** permet de construire une somme de vecteurs en les mettant « bout-à-bout » (l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second).

2. La **propriété 2** permet de construire la somme de deux vecteurs de même origine.

1.3 Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition : A et B désignent deux points distincts et k un nombre réel non nul.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors C est le point de la droite (AB) tel que :
— Si $k > 0$, $AC = k \times AB$ et les points B et C sont du même côté de A (figure 4).
— Si $k < 0$, $AC = (-k) \times AB$ et les points B et C sont de part et d'autre de A (figure 5).

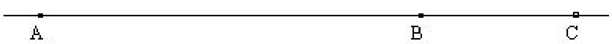

FIGURE 4 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 1

FIGURE 5 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 2

Remarque : 1. Autrement dit :
— Si $k > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, même sens et $AC = k \times AB$.
— Si $k < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, sens opposés et $AC = (-k) \times AB$.

2. Les règles de calcul de calcul sont les mêmes que pour les nombres.

1.4 Coordonnées d'un vecteur

Propriété : On se place dans un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.

1. Si $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
2. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$
3. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et si $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \end{pmatrix}$
4. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

2 Colinéarité de deux vecteurs

2.1 Vecteurs colinéaires

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont même direction.
Ainsi, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et si $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $(AB) \parallel (CD)$.

Remarque : On conviendra que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à *tous* les vecteurs.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Applications :
— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
— Trois points A, B et C sont alignés *si et seulement si* les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercices : 5, 6, 7, 9 page 172[1] – 56 page 182[2][TransMath]

2.2 Expression de la colinéarité dans un repère

Propriété : Soit $(O\,;\,I\,;\,J)$ un repère *quelconque* du plan. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Remarque : Cette propriété est due au fait que deux vecteurs sont colinéaires *si et seulement si* leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exercices : 1, 2, 3, 4 page 171 et 49, 50, 52, 53 page 182[3] [TransMath]

3 Décomposition d'un vecteur

Activité : Activité 2 page 167[4] [TransMath]

1. Alignement, parallélisme.
2. coefficient de colinéarité
3. Utiliser la colinéarité en géométrie repérée.
4. Une propriété fondamentale des vecteurs

3.1 Décomposer un vecteur suivant deux vecteurs non colinéaires

Théorème 1 : (admis)
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non colinéaires.
Alors, pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(x\,;\,y)$ tel que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

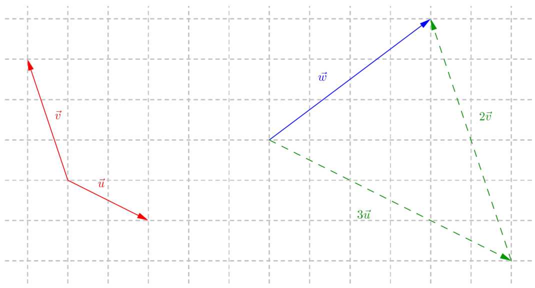

FIGURE 6 – Décomposition d'un vecteur suivant deux vecteurs non colinéaires

Remarques : 1. Par exemple, sur la figure 6, on a $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

2. En prenant des représentants des vecteurs, on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2 : (admis)
Soit A, B et C trois points du plan non alignés.
Alors, pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x\,;\,y)$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Remarques : 1. Cette décomposition est souvent obtenue grâce à la relation de CHASLES.

2. On utilise souvent ce type de décomposition pour des problèmes de colinéarité (voir exercice résolu B page 172 [TransMath])

Exercices : ; 57, 59, 60, 62 page 183 et 100 page 188 [5] – 105 page 189 [6] [TransMath]

3.2 Une nouvelle notation pour les repères

Soit O, I, J trois points non alignés. Ils forment donc le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.
On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ (voir figure 7).

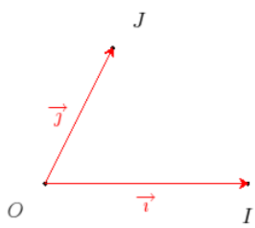

FIGURE 7 – Un repère du plan

5. Utiliser la colinéarité en géométrie non repérée.
6. Expérimentation avec GeoGebra.

Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires, donc d'après le 3.1, pour tout point M du plan, il existe un unique couple $(x\,;\,y)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Ce couple $(x\,;\,y)$ est en fait le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ (voir figure 8).

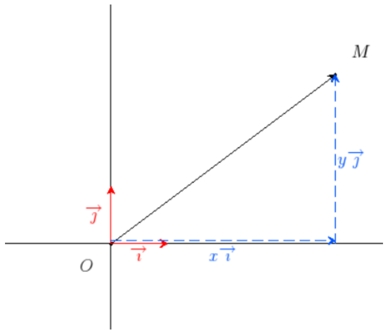

FIGURE 8 – Coordonnées d'un point

On notera donc ce repère sous la forme $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Remarque : Le choix d'un point et de deux vecteurs non colinéaires permet donc de définir un repère du plan. Choisir un repère peut permettre de résoudre plus facilement des problèmes liés à la colinéarité (voir exercice résolu F page 176 [TransMath]).

Exercices : 25, 26 page 176 ; 31, 33 page 178 ; 64, 65, 67 page 183 et 98 page 187[7] [TransMath]

4 Équation cartésienne d'une droite

4.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit d une droite.
On dit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d si sa direction est celle de d (voir figure 9).

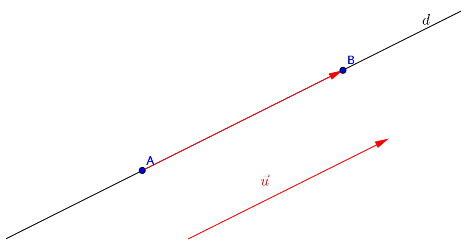

FIGURE 9 – Vecteur directeur d'une droite

Remarques :
1. Tout vecteur non nul, colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.
2. Si A et B sont deux points distincts de d, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.
3. La droite d est entièrement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

Propriété : Soit d et d' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.
d et d' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

7. Choisir un repère pour résoudre un problème.

4.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème : Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$:

- Toute droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.
- Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ (avec a et b non simultanément nuls) est une équation de droite.

Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite.

Remarque : Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'une droite. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $x-y+1=0$ admet aussi comme équation $2x-2y+2=0$ ou $-x+y-1=0$ par exemple.

Propriété : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice résolu : Trouver une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\,(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

$M\,(x\,;y)\in\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

Or, ici : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{aligned}3\,(x-1) &= -1\,(y-2)\\ 3x-3 &= -y+2\\ 3x+y-5 &= 0\end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc : $3x+y-5=0$.

Exercices : 11, 12 page 173 ; 15, 16, 19 page 174 et 72, 73, 78 page 184 [8] – 13 page 173 [9] – 20, 21, 23, 24 page 175 ; 74, 76, 77 page 184 et 83, 86, 87 page 185 [10] – 80, 81 page 185 ; 97, 98 page 187 et 102 page 188 [11] – 91 page 186 [12] [TransMath]

Module : Exercices 37 page 180 [13] et 38 page 181 [14] [TransMath]

4.3 Lien entre équation réduite et équation cartésienne

Propriété 1 : Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ (avec a et b non simultanément nuls).

- Si $b=0$, alors $\mathcal{D}$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, qui admet une unique équation réduite de la forme $x=k$, avec $k\in\mathbb{R}$.
- Si $b\neq 0$, alors la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; elle admet une unique équation réduite de la forme $y=mx+p$ avec $m,\,p\in\mathbb{R}$.

Démonstration

Si $b=0$, l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $ax+c=0$ avec $a\neq 0$.
On a donc, $ax=-c$ puis $x=-\frac{c}{a}$.
Si $b\neq 0$, on a : $by=-ax-c$ puis $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

8. Équation cartésienne d'une droite.
9. Tracé de droites.
10. Positions relatives de deux droites.
11. Choisir un repère.
12. R.O.C.
13. Étudier la position relative de trois droites.
14. Droite mobile autour d'un point fixe.

Propriété 2 : Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$:

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées, qui admet une unique équation réduite de la forme $x = k$, avec $k \in \mathbb{R}$, a comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées qui admet une unique équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m, $p \in \mathbb{R}$, a comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Démonstration

L'équation réduite $x = k$ correspond à l'équation cartésienne $1 \times x + 0 \times y - k = 0$. Un vecteur directeur est donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation réduite $y = mx + p$ correspond à l'équation cartésienne $mx - y + p = 0$. Un vecteur directeur est donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Exercices : 10 page 173 ; 21 page 175 ; 70, 76 page 184 et 84 page 185 [15] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1reS, édition 2011 (Nathan)

5, 6, 7, 8, 9

15. Équation réduite et équation cartésienne.