

2 Trigonométrie

2.1 Cosinus et sinus

Définition 1 : On dit qu'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan orienté est **orthonormal direct** si :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{et} \quad (\vec{i}; \vec{j}) = +\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Définition 2 : Soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O et A, B deux points du cercle \mathcal{C} tels que le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ soit **orthonormal direct** (voir figure 1).

Soit x un réel.

Il existe un unique point M du cercle trigonométrique \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = x [2\pi]$.

On appelle **cosinus et sinus** de x (notés $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

$\cos x$: **abscisse** du point M

$\sin x$: **ordonnée** du point M .

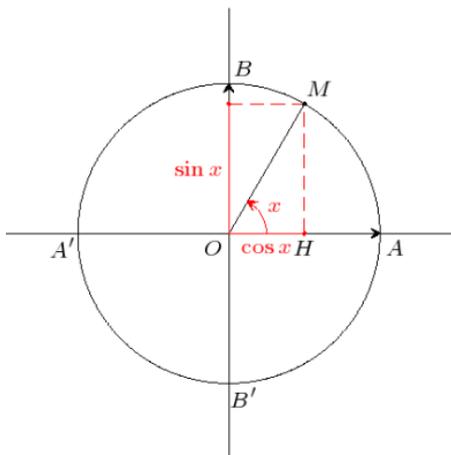


FIGURE 1 – Cosinus et sinus

Remarques :

1. Si $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est une autre mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$. On a donc :

$$\cos(\dots\dots\dots) = \cos x$$

$$\sin(\dots\dots\dots) = \sin x$$

2. $A(1; 0)$ donc : $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$
 $B(0; 1)$ donc : $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$
 $A'(-1; 0)$ donc : $\cos(\dots\dots) = \dots\dots$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$
 $B'(0; -1)$ donc : $\cos(\dots\dots) = 0$ et $\sin(\dots\dots) = \dots\dots$

3. Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

Or, $OM = 1$, $OH^2 = (\cos x)^2$ et $HM^2 = (\sin x)^2$. On a donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Dans toute la suite, on notera : $\cos^2 x = (\cos x)^2$ et $\sin^2 x = (\sin x)^2$. La relation précédente devient alors :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2.2 Quelques relations

On a déjà les relations suivantes :

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

On rappelle de plus que, si $\cos x \neq 0$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Les cosinus, sinus et tangente des angles remarquables sont données dans le tableau 1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

TABLE 1 – Valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente

Remarque : Pour retenir tous les résultats du tableau 1, on peut s'aider du cercle trigonométrique (voir figure 2).

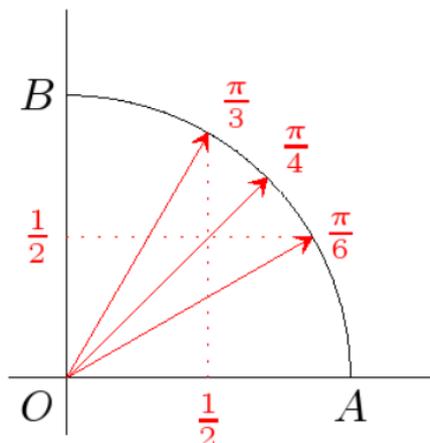


FIGURE 2 – Angles remarquables

Exercice :

Calculer $\sin \alpha$ et $\cos \beta$ sachant que :

— $\cos \alpha = 0,6$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

— $\sin \beta = 0,8$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Exercices :

- 59, 60, 61 page 208 [TransMath] : *Lignes trigonométriques*
- 44 page 206 et 89 page 211 [TransMath] : *Repérage polaire*

Références

[TransMath] transMATH 1^{re}S, édition 2011 (NATHAN)