Variations de fonctions associées

I. Rappels :

1. Sens de variations :

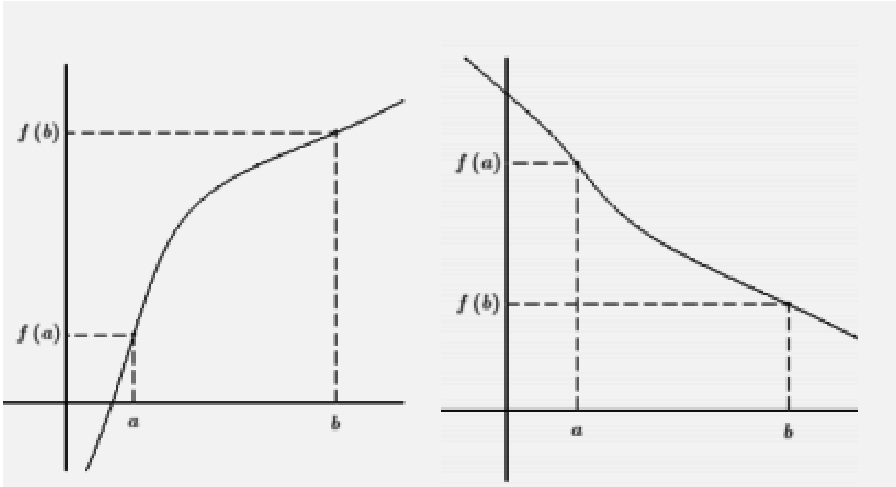
a. Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
— On dit que *f est croissante sur l'intervalle I* si : Pour tout $a, b \in I$, *si* $a > b$ *alors* $f(a) > f(b)$

Ce qui signifie que f « conserve l'ordre »

— On dit que *f est décroissante* sur l'intervalle I si : Pour tout $a, b \in I$, *si* $a > b$ *alors* $f(a) < f(b)$

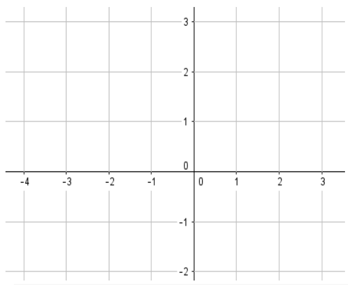
Ce qui signifie que f « inverse l'ordre »



(a) Fonction croissante (b) Fonction décroissante

Remarque : Avec des inégalités strictes, on dit que f est strictement croissante ou strictement décroissante

Si une fonction f est soit toujours (strictement) croissante, soit toujours (strictement) décroissante sur un intervalle I, on dit que f est (strictement) montone sur l'intervalle I.



2. Cas particuliers :

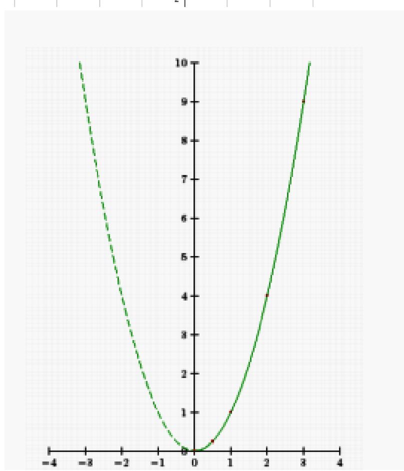
a. Fonctions affines :

Propriété : Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

— Si $m > 0$ alors la fonction f est strictement croissante

— Si $m = 0$ alors la fonction f est constante

— Si $m < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante



b. Fonction carrée

Propriété :

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$

, strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et son minimum est 0 atteint en 0

La courbe représentative de la fonction carrée est une parabole

Tableau de variation à faire !

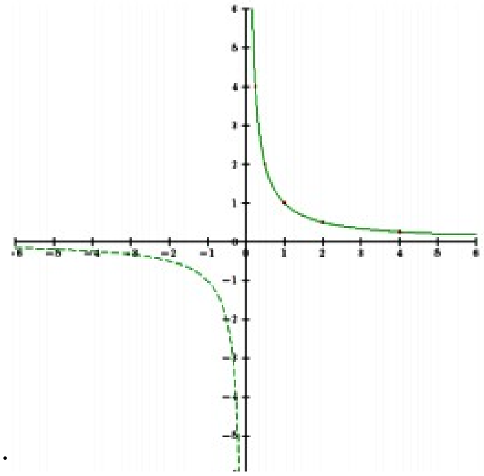
c. Fonction inverse

Propriété :

La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$

et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole



Remarques : 1. La courbe représentative de la fonction inverse ne touche aucun des axes de coordonnées. Par contre, elle s'en rapproche indéfiniment...

2. Il est faux de dire que la fonction inverse est décroissante sur R\ {0}.

Par exemple, −3 < 2 et -1/3 < 1/2

L'ordre n'est ici en aucun cas inversé...
On ne peut de toute façon étudier les variations d'une fonction que sur **un intervalle**.

II. La fonction racine carrée :

1. Définition : Soit x un nombre *réel positif.* Il existe un *unique nombre positif dont le carré* est x. Ce nombre est appelé racine carré de x et est noté $\sqrt{x}$

On appelle fonction racine carrée la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ Elle est donc définie sur $[0\,;+\infty[$

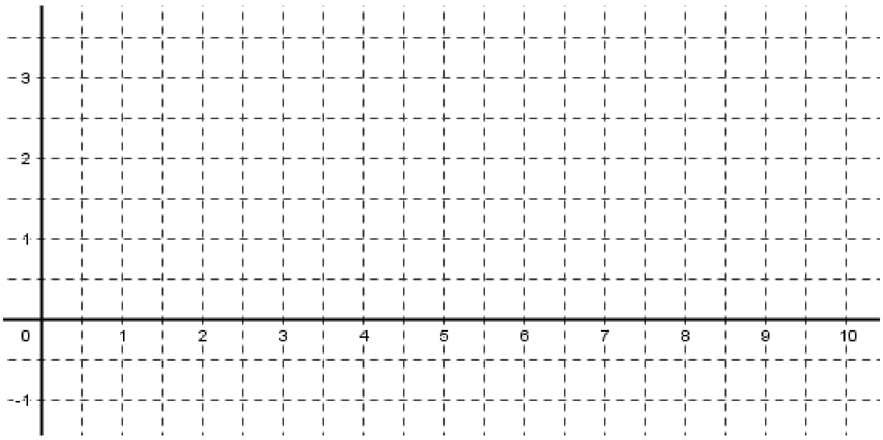
2. Sens de variation – Courbe représentative

1. Soient a et b deux nombres tels que 0 ≤ a < b. Montrer que : $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

2. (a) Montrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

   (b) Compléter le tableau de valeurs suivant puis tracer une allure de la courbe représentative de la fonction racine carrée dans le repère orthonormé ci-contre.:

x	0	1/4	1	4	9
$\sqrt{x}$					



Bilan : ………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

III. Sens de variation des fonctions associées :

1. Variations de $x \longmapsto u(x) + k$:

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel fixé. On note v la fonction définie sur I par $v(x) = u(x) + k$. Les fonctions u et v ont le même sens de variations sur I

Démonstration :
1er cas : On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.

Soit a, b ∈ I, avec $a \leq b$ On a alors $u(a) \leq u(b)$ Par suite, $u(a)+k \leq u(b)+k$, d'où $v(a) \leq v(b)$

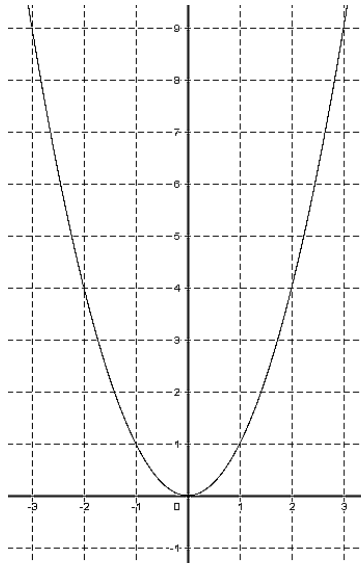
La fonction v est donc croissante sur l'intervalle I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante sur l'intervalle I.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u par une translation verticale de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 + 3$.
La fonction f a les mêmes variations (forme $x \longrightarrow u(x) + k$) que la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de la fonction carrée	↘	0	↗
variations de f	↘	3	↗



La courbe représentative de f se déduit de celle de la fonction carrée par une translation de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$. Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction f à partir de celle la fonction représentée ci-contre.

2. Variations de $x \longmapsto \lambda\, u(x)$:

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel fixé non nul. On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \lambda\, u(x)$.
Si $\lambda > 0$, les fonctions u et v ont le même sens de variations sur I.

Si $\lambda < 0$, les fonctions u et v ont des sens de variations contraires sur I.

Démonstration :
1er cas : On suppose que u est croissante sur l'intervalle I et $\lambda < 0$.

Soit a, b ∈ I, avec $a < b$ On a alors $u(a) < u(b)$ Comme $\lambda < 0$, $\lambda u(a) > \lambda u(b)$, d'où $v(a) < v(b)$

La fonction v est donc décroissante sur l'intervalle I.

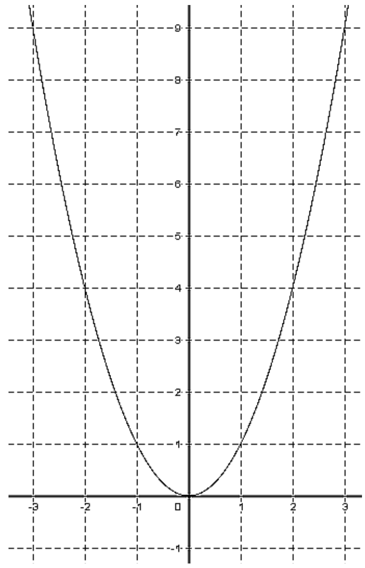
Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u en **multipliant toutes les ordonnées** par λ.

Exemples : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2$. Comme $\frac{3}{4} > 0$, la fonction f a le même sens de variations (forme λu avec $\lambda > 0$) que la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de la fonction carrée	↘	0	↗
variations de f	↘	0	↗

Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction f à partir de celle la fonction représentée ci-contre. Vous pouvez vous aider du tableau de valeurs :

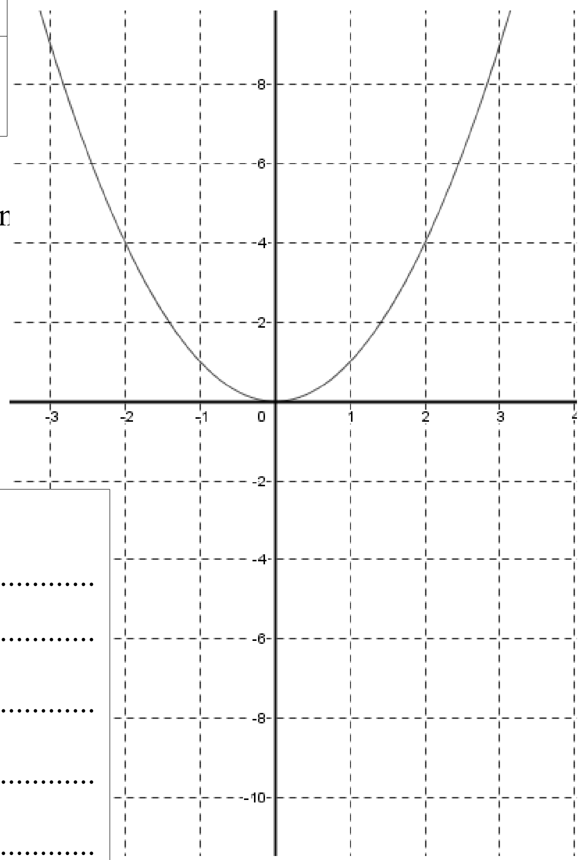


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{3}{4}x^2$	$\frac{27}{4}$	3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$

— Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2$. Comme $-2 < 0$, la fonction g a un sens de variations contraire (forme λu avec $\lambda < 0$) à la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de la fonction carrée	↘	0	↗
variations de g	↗	0	↘

Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction f à partir de celle la fonction représer ci-contre. Vous pouvez vous aider du tableau de valeurs :



x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Bilan :

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3. <u>Variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{\boldsymbol{u(x)}}$:</u>

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{u\ (x) \neq 0}$ et le signe de u est **constant** sur I. On note v la fonction définie sur I par $v\ (x) = \dfrac{1}{u(x)}$
Les fonctions u et v ont **des sens de variations contraires** sur I.

Démonstration :
1er cas : On suppose que u est croissante et strictement négative sur l'intervalle I.
Soit a, b $\in I$, avec $a \leq b$. On a alors $u(a) \leq u(b) < 0$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, on a $\dfrac{1}{u(a)} \geq \dfrac{1}{u(b)}$ soit $v(a) \geq v(b)$, la fonction v est décroissante sur I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f\ (x) = \dfrac{1}{-2x+4}$.
Soit u la fonction définie par $u\ (x) = -2x + 4$. u est une fonction affine strictement décroissante dont le tableau de signes est :

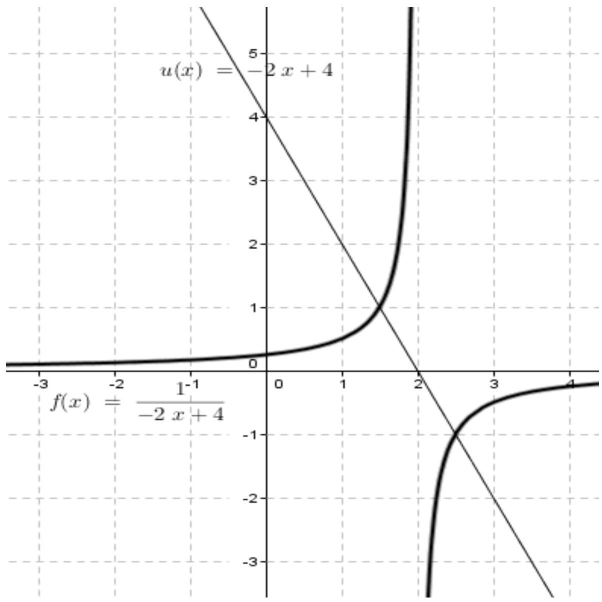
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$signe\ de\ u(x)$		$+$	0	$-$	

- Sur $]-\infty\ ;\ 2[$, u est strictement décroissante et strictement négative et f a un sens de variations contraire à u.
- Sur $]2\ ;\ +\infty[$, u est strictement décroissante et strictement positive et f a un sens de variations contraire à u.

On obtient le tableau de variations suivant à compléter:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
variations de la fonction u			0	↘	
variations de f		↗	‖	↗	

La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-contre :



4. <u>Variations de $x \longmapsto \sqrt{\boldsymbol{u(x)}}$:</u>

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \geq 0$.
On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \sqrt{u(x)}$. Les fonctions u et v ont **le même sens de variations** sur I.

Démonstration :

On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.
Soit a, b $\in I$, avec $a \leq b$. On a alors $0 \leq u(a) \leq u(b)$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$ soit $v(a) \geq v(b)$, la fonction v est donc aussi croissante sur I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-2x+4}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = -2x + 4$. On connaît déjà le tableau de signe de cette fonction !

La fonction f est donc définie sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

— Sur $]-\infty\,; 2]$, u est strictement décroissante et f a les mêmes variations que la fonction u.

On obtient le tableau de variations suivant à compléter:

x	$-\infty$	2
variations de la fonction u	↘	0
variations de f	↘	0

La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous :

Bilan : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....