Variations de fonctions associées

I. Rappels :

1. Sens de variations :

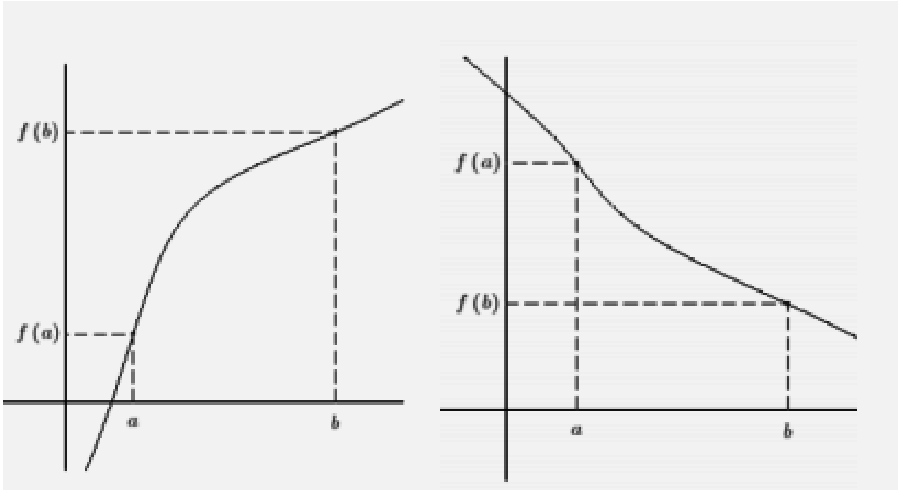
a. Définitions :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I*.
— On dit que *f est croissante sur l'intervalle I* si : Pour tout *a, b* ∈ *I, si a. . .b alors f (a). . .f (b)*

Ce qui signifie que *f* ....

— On dit que *f est décroissante* sur l'intervalle I si : Pour tout *a, b* ∈ *I, si a. . .b alors f (a). . .f (b)*

Ce qui signifie que *f* ....



(a) Fonction croissante (b) Fonction décroissante

Remarque : Avec des inégalités strictes, on dit que *f* est ………………. croissante ou ……………….. décroissante

Si une fonction *f* est soit toujours (strictement) croissante, soit toujours (strictement) décroissante sur un intervalle *I*, on dit que *f* est (strictement) **…………….…………….………** sur l'intervalle *I*.

2. Cas particuliers :

a. Fonctions affines :

Propriété : Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine.

— Si m > 0 alors la fonction *f* est ....

— Si m = 0 alors la fonction *f* est ....

— Si m < 0 alors la fonction *f* est ....

b. Fonction carrée

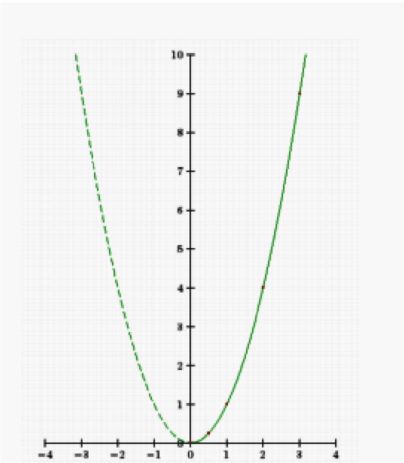
Propriété :

La fonction carrée est ....

…..

....

La courbe représentative de la fonction carrée est une ....



c. *Fonction inverse*

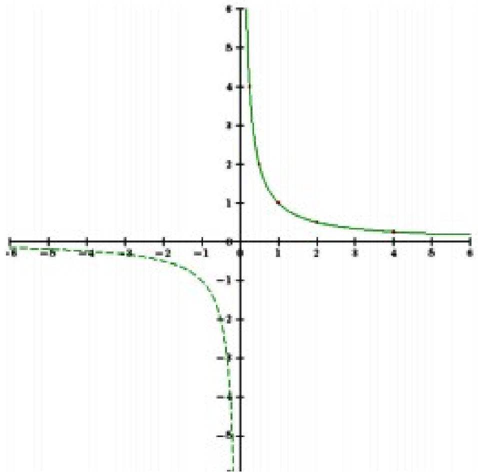
Propriété :

La fonction inverse est ....

…...

…...

La courbe représentative de la fonction inverse est une ……………



Remarques : 1. La courbe représentative de la fonction inverse ne touche aucun des axes de coordonnées. Par contre, elle s'en rapproche indéfiniment...

2. Il est faux de dire que la fonction inverse est décroissante sur R\ {0}. Par exemple, $-3 < 2$ et ……………..

L'ordre n'est ici en aucun cas inversé...
On ne peut de toute façon étudier les variations d'une fonction que sur **un intervalle**.

II. La fonction racine carrée :

1. Définition : Soit x un nombre *réel positif*. Il existe un *unique nombre positif dont le carré* est x. Ce nombre est appelé racine carré de x et est noté ....

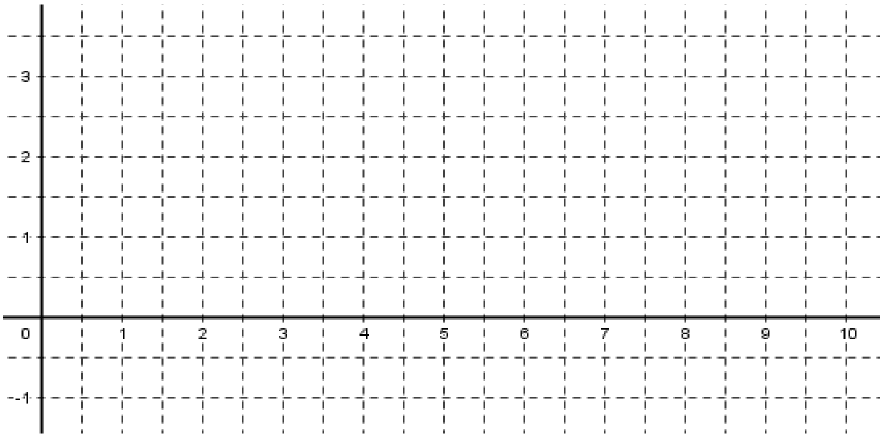
On appelle fonction racine carrée la fonction ……..........……..... Elle est donc définie sur ....…..

2. Sens de variation – Courbe représentative

1. Soient a et b deux nombres tels que $0 \le a < b$. Montrer que : $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$
2. (a) Montrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

   (b) Compléter le tableau de valeurs suivant puis tracer une allure de la courbe représentative de la fonction racine carrée dans le repère orthonormé ci-contre.:

x	0	1/4	1	4	9
$\sqrt{x}$					



Bilan : ……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

III. Sens de variation des fonctions associées :

1. Variations de $x \longmapsto u(x) + k$:

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel fixé. On note v la fonction définie sur I par $v(x) = u(x) + k$. Les fonctions u et v ....

Démonstration :
1er cas : On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.

Soit a, b $\in I$, avec …........................... On a alors …............................ Par suite, …..................................,

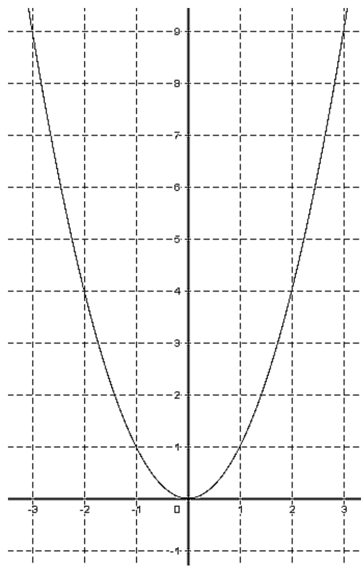
d'où …................................... La fonction v est donc croissante sur l'intervalle I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante sur l'intervalle I.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u par une translation verticale de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 + 3$.
La fonction f a les mêmes variations que la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de la fonction carrée	
variations de f	



La courbe représentative de f se déduit de celle de la fonction carrée par une translation de vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$. Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction f à partir de celle la fonction représentée ci-contre.

2. Variations de $x \longmapsto \lambda\, u(x)$:

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel fixé non nul. On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \lambda\, u(x)$.

— …..

— …..

Démonstration :
1er cas : On suppose que u est croissante sur l'intervalle I et $\lambda < 0$.

Soit a, b $\in I$, avec …............... On a alors …................................. Comme $\lambda < 0$, …........................., d'où

…................................... La fonction v est donc décroissante sur l'intervalle I.

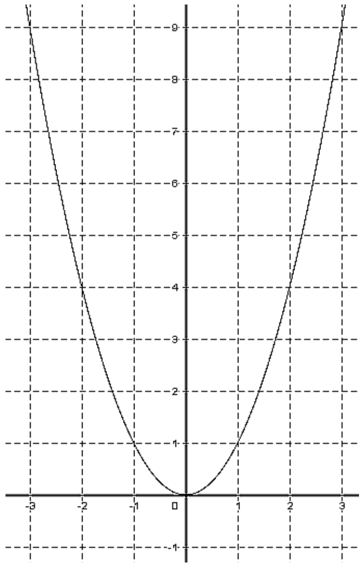
Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Remarque : La courbe représentative de v se déduit de celle de u en **multipliant toutes les ordonnées** par λ.

Exemples : — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2$. Comme $\frac{3}{4} > 0$, la fonction f a …...................

.... que la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de la fonction carrée	
variations de f	..

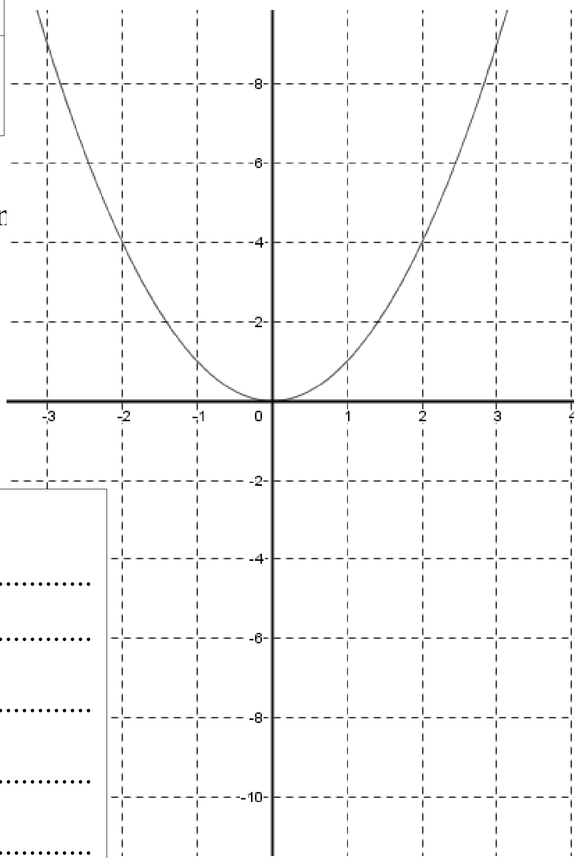


Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction *f* à partir de celle la fonction représentée ci-contre. Vous pouvez vous aider du tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{3}{4}x^2$							

— Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $g(x) = -2x^2$. Comme $-2 < 0$, la fonction g a …..............................
.... à la fonction carrée. On obtient ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
variations de la fonction carrée	0
variations de g	..



Construire l'allure de la courbe représentative de la fonction *f* à partir de celle la fonction représen ci-contre. Vous pouvez vous aider du tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$					

Bilan :

…..
…..
…..
…..
…..
…..
…..
…..
…..
…..

3. <u>Variations de $x \longmapsto \dfrac{1}{u(x)}$:</u>

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, **…...............................**et le signe de u est **…..................** sur I. On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ Les fonctions u et v ont …... sur I.

Démonstration :

1er cas : On suppose que u est croissante et strictement négative sur l'intervalle I.

Soit a, b ∈ I, avec …................................ On a alors …...................................

Comme la fonction inverse est …............................... sur $]-\infty ; 0[$, on a …................................... soit …...................., la fonction v est donc …........................... sur I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans les trois cas restants, après les avoir énumérés.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{-2x+4}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = -2x + 4$. u est une fonction affine strictement …............................ dont le tableau de signes est :

x	
signe de $u(x)$	

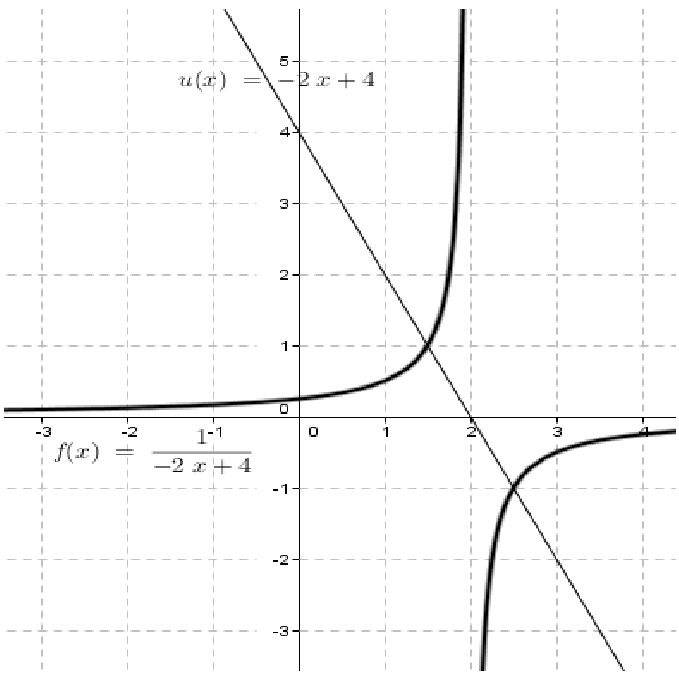
— Sur $]-\infty ; 2[$, u est …... et f a un sens de variations …... à u.

— Sur $]2 ; +\infty[$, u …... et f a un sens de variations …..à u.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	
variations de la fonction u	
variations de f	

La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-contre :



4. <u>Variations de $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$:</u>

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, **…......................**
On note v la fonction définie sur I par $v(x) = \sqrt{\boldsymbol{u(x)}}$.
Les fonctions u et v ont …... sur I.

Démonstration :
On suppose que u est croissante sur l'intervalle I.

Soit a, b $\in I$, avec …................................. On a alors ….. Comme la fonction racine carrée est ….................... sur $[0 ; +\infty[$, on a …..soit …..............................., la fonction v est donc aussi croissante sur I.

Exercice : Reprendre la démonstration dans le cas où u est décroissante.

Exemple : Étude des variations de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-2x+4}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = -2x + 4$. On connaît déjà le tableau de signe de cette fonction !

La fonction f est donc définie sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

— Sur $]-\infty ; 2]$, u est strictement …...et f a

…..

….. à u.

On obtient le tableau de variations suivant à compléter:

x	
variations de la fonction u	
variations de f	

La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous :

Bilan : ....
…..
....
…..
....
…..
....
....
....
....
....