Fonctions dérivées
Applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2017/2018

Table des matières

Liste des tableaux

1 Quelques rappels

1.1 Nombre dérivé – Tangente

Dans toute la suite, on considère une fonction f définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Définition : Si le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est dérivable en a.
Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.
On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque : Le nombre dérivé de f en a est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

1.2 Notion de fonction dérivée

Définition : Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle I.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur l'intervalle I la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$. On note cette fonction f'.

Remarque : Dire qu'une fonction est dérivable signifie qu'il existe des tangentes à tout point de la courbe la représentant. Par contre, la fonction dérivée n'a plus de lien avec la tangente en un point.

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

Les résultats concernant les dérivées des fonctions usuelles sont résumés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Tous les résultats de cette section sont admis.

2.1 Somme de deux fonctions dérivables

Propriété 1 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u'+v'$.
On note : $(u+v)' = u'+v'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
$f = u+v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.
u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Par suite f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

2.2 Multiplication par une constante

Propriété 2 : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est ku'.
On note : $(ku)' = ku'$.

Exemples : Soit $f(x) = 3x^3 - x^2 + x\sqrt{2} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 1 \times \sqrt{2} + 0 = 9x^2 - 2x + \sqrt{2}$.

Remarque : Il résulte des propriétés 1 et 2 que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercices : 1, 2, 3 page 97 [1] – 4 page 97 ; 43, 44,45 page 106 et 47, 48, 50 page 107 [2] – 51page 107 [3] [TransMath]

2.3 Produit de fonctions dérivables

Propriété 3 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction (uv) est dérivable sur I et sa dérivée est $u'v+uv'$.
On note : $(uv)' = u'v+uv'$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
f est de la forme uv avec : $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$
u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Par suite, f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Exercices : 5 page 98 et 32, 33 page 106 [4] – 41 page 106 [5] [TransMath]

2.4 Inverse d'une fonction dérivable

Propriété 4 : Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $-\frac{v'}{v^2}$.
On note : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
f est de la forme $\frac{1}{v}$, où $v(x) = 3x-1$.
v est dérivable sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, ne s'annule pas sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $v'(x) = 3$.
Par suite, f est dérivable sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $f'(x) = -\frac{3}{(3x-1)^2}$.

1. Dérivée d'une somme.
2. Équation de tangente.
3. Positions relatives d'une courbe et de ses tangentes.
4. Dérivée d'un produit.
5. Équation de la tangente.

2.5 Quotient de fonctions dérivables

Propriété 5 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
On note : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+5}{x-2}$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x+5$ et $v(x) = x-2$.
u et v sont dérivables sur $]2\,;+\infty[$, on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$. De plus, v ne s'annule pas sur $]2\,;+\infty[$.
Par suite, f est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{4\times(x-2)-(4x+5)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{4x-8-4x-5}{(x-2)^2} = -\frac{13}{(x-2)^2}$$

Remarque : Il résulte de la propriété 5 que toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exercices : 6, 8 page 98 et 34, 35, 36, 37 page 106 [6] – 7 page 98 et 39, 40 page 106 [7] – 53 page 107 [8] [TransMath]

2.6 En résumé...

Le tableau 2 résume les différentes règles de dérivation ainsi que leurs conditions d'applications.

	Opération	**Dérivée**	**Conditions d'utilisation**
Somme de deux fonctions	$u+v$	$u'+v'$	u et v dérivables sur I
Multiplication par une constante	ku	ku'	u dérivable sur I
Produit de deux fonctions	uv	$u'v+uv'$	u et v dérivables sur I
Inverse d'une fonction	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x\in I$, $v(x)\neq 0$
Quotient de deux fonctions	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x\in I$, $v(x)\neq 0$

TABLE 2 – Opérations sur les fonctions dérivables

Exercices : 37, 38, 53 page 75 ; 63 page 76 ; 64 page 77 ; 67, 69, 71, 74 page 78 et 81 page 79 [9] – 60 page 75 et 84 page 79 [10] – 61 page 76 et 88, 89 page 80 [11] – 84 page 112 [12] [TransMath]

3 Applications de la dérivation

3.1 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

6. Dérivée d'un quotient.
7. Équation d'une tangente.
8. Positions relatives d'une courbe et de ses tangentes.
9. Tangentes à une courbe.
10. Approximation affine locale.
11. Détermination de fonctions.
12. ROC

Remarques : 1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.

2. Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit donc d'étudier le signe de sa dérivée. Néanmoins, dans certains cas simples (trinôme du second degré ou fonction affine par exemple), ceci n'est pas toujours nécessaire.

Exemples : 1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 2 = x^2 + x - 2$.

Il faut déterminer le signe de f'. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.

$\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

On en déduit le signe de f' :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	$\frac{25}{3}$	$\searrow$	$\frac{23}{6}$	$\nearrow$	

Avec :

$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2)^3 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 5 = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 5 = -\frac{8}{3} + 11 = -\frac{8}{3} + \frac{33}{3} = \frac{25}{3}$

$f(1) = \frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 - 2 \times 1 + 5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 5 = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 3 = \frac{5}{6} + \frac{18}{6} = \frac{23}{6}$

2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$$

On pose : $u(x) = 4x + 3$ $\quad v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 4$ $\quad v'(x) = 2x$

$$g'(x) = \frac{4 \times \left(x^2+1\right) - (4x+3) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2 - 6x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-4x^2 - 6x + 4}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Comme pour tout x de $\mathbb{R}$, $\left(x^2+1\right)^2$ est strictement positif (c'est un carré), $g'(x)$ est du signe de $-4x^2 - 6x + 4$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-4) \times 4 = 36 + 64 = 100$.

Comme $\Delta > 0$,il y a deux racines : $x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times(-4)} = \frac{6-10}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times(-4)} = \frac{6+10}{-8} = \frac{16}{-8} = -2$.

On en déduit le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	

Avec :

$g(-2) = \frac{4\times(-2)+3}{(-2)^2+1} = \frac{-8+3}{4+1} = \frac{-5}{5} = -1$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\times\frac{1}{2}+3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{2+3}{\frac{1}{4}+1} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$

Exercices : 9, 10, 11 page 99 et 57, 59, 60, 64 page 108 [13] – 19 page 102 et 90 page 113 [14] – 61, 62 page 108 [15] – 66 page 109 et 98 page 115 [16] – 87, 88, 89 page 113 [17] [TransMath]

13. Étude de variations.
14. Comparaison de fonctions.
15. À partir d'un graphique.
16. Dérivée seconde.
17. Identification.

3.2 Extremum local

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.
On dit que $f(c)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant c et inclus dans I tel que, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).

Remarque : 1. Un extremum local est soit un maximum local, soit un minium local.

2. On peut remarquer sur f est dérivable et si $f(x_0)$ est un extremum local, alors $f'(x_0) = 0$. Mais attention à la réciproque...

Propriété (admise) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$, x_0 n'étant pas une extrémité de I.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Module : TP 23 page 104 et 24 page 105 [18] [TransMath]

Exercices : 12 page 99 et 67, 68, 69 page 109 [19] – 13, 14 page 100 ; 20 page 102 ; 72 page 109 ; 75, 76, 77 page 110 ; 81, 82 page 111 et 93, 94, 95 page 114 [20] – 79 page 111 [21] – 83 page 112 [22] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1^re^S, édition 2011 (Nathan)

3, 4, 5, 6

18. Optimisation, utilisation de GeoGebra.
19. Extremums locaux.
20. Optimisation.
21. Algorithmique.
22. Utilisation de GeoGebra.