Angles orientés de vecteurs
Trigonométrie

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2017/2018

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Activité 1 (fp) : *Arcs orientés sur un cercle*

1 Mesures d'angles orientés de vecteurs

1.1 Cercle trigonométrique – mesures d'arcs orientés

Définition : On appelle cercle trigonométrique un cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct (voir figure 1).

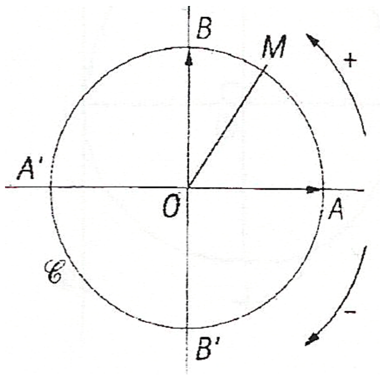

FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique

L'arc orienté $\widehat{AB}$ a une infinité de mesures : $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$... Elles sont toutes définies au nombre de « tours » près. Toute mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est donc de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. Plus généralement :

Propriété : Soit A et M deux points du cercle trigonométrique.
Si l est une mesure de l'arc orienté $\widehat{AM}$, alors toutes les mesures de cet arc sont de la forme $l + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
On note alors : $\widehat{AM} = l + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $\widehat{AM} = l\ [2\pi]$.
La deuxième notation se lit : « l modulo 2π ».

Exemples : A l'aide des propriétés géométriques de la figure 2, on a :

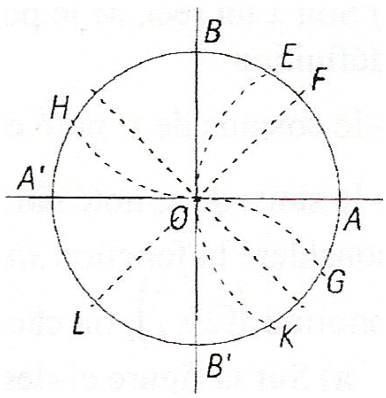

FIGURE 2 – Exemples de mesures d'arcs orientés

$$\widehat{AE} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\,;\ \widehat{AF} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\,;\ \widehat{AG} = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\,;\ \widehat{AH} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\,;\ \widehat{AK} = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ et } \widehat{AL} = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$$

Exercices : 30, 33 page 205 et 37 page 206[1] [TransMath]

1. Utilisation du cercle trigonométrique.

1.2 Angles orientés de vecteurs unitaires

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires ($\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$).
Il existe deux points M et N du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$ (voir figure 3).
On appelle mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}\ , \overrightarrow{v})$ toute mesure de l'arc orienté $\widehat{MN}$. On utilisera donc les mêmes notations.
L'unité de mesure est le radian (noté rad).

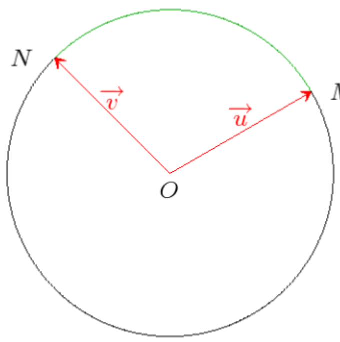

FIGURE 3 – Angles orientés de vecteurs unitaires

Remarque : π rad correspond à 180°. Un tableau de proportionnalité permet donc de passer facilement des degrés aux radians (et réciproquement), voir tableau 1.

Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Mesure de l'angle en degré	0	30	45	60	90	180

TABLE 1 – Conversion degrés-radians

On passe de la première à la deuxième ligne en multipliant par $\frac{180}{\pi}$.

Exemples : On se reportera à la figure 2.

1. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (exemples de mesure : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$)
2. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG}\right) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ (exemples de mesure : $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$)
3. $\left(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OL}\right) = \pi\ [2\pi]$ (exemples de mesure : π ; 3π ; $-\pi$; 5π)
4. $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OK}\right) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Définition : Une seule mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}\ , \overrightarrow{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi\ ; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{u}\ , \overrightarrow{v})$.

Exercice : Trouver la mesure principale de l'angle $\frac{17\pi}{3}$.

On sait que la mesure principale est de la forme $\frac{17\pi}{3} + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et qu'elle doit être dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} -\pi < & \frac{17\pi}{3} + 2k\pi & \leq \pi \\ -1 < & \frac{17}{3} + 2k & \leq 1 \quad \text{(en divisant par}\pi) \\ -1 - \dfrac{17}{3} < & 2k & \leq 1 - \dfrac{17}{3} \\ -\dfrac{20}{3} < & 2k & \leq -\dfrac{14}{3} \\ -\dfrac{10}{3} < & k & \leq -\dfrac{7}{3} \end{array}$$

De plus, on sait que $k \in \mathbb{Z}$. Or, le seul entier relatif vérifiant l'encadrement précédent est $k = -\frac{9}{3} = -3$.

La mesure principale de l'angle est donc : $\frac{17\pi}{3} + 2 \times (-3) \times \pi = \frac{17\pi}{3} - 6\pi = \frac{17\pi - 18\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Exercices : 31 page 205 et 36 page 206 [2] – 34 page 205 [3] – 35 page 205 [4] [TransMath]

1.3 Angles orientés de vecteurs – Cas général

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. On se référera à la figure 4.

On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ON}$.

les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent respectivement le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ en A et B.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont unitaires et respectivement de même direction et de même sens que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On appelle alors mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$, toute mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}\right)$.

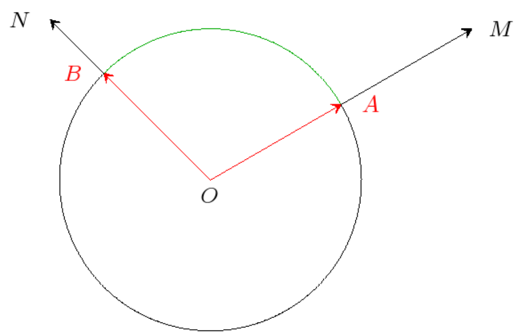

FIGURE 4 – Angle orienté de vecteurs – cas général

Exercices : 29, 32 page 205 et 38, 40, 42 page 206 [5] – 43 page 206 [6] [TransMath]

2. Angles orientés de vecteurs unitaires.
3. Mesure principale.
4. Algorithmique.
5. Angles orientés de vecteurs.
6. Ensemble de points.

2 Trigonométrie

2.1 Cosinus et sinus

Définition 1 : On dit qu'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan orienté est orthonormal direct si :

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1 \qquad \text{et} \qquad (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}) = +\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Définition 2 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A, B deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$ soit orthonormal direct (voir figure 5).
Soit x un réel.
Il existe un unique point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = x\ [2\pi]$.
On appelle cosinus et sinus de x (notés $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$.

$\cos x$: abscisse du point M
$\sin x$: ordonnée du point M.

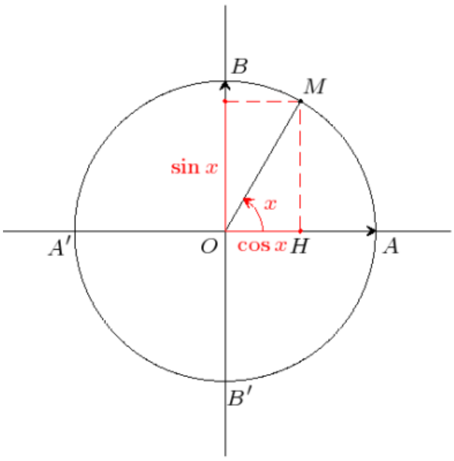

FIGURE 5 – Cosinus et sinus

Remarques :

1. Si $k \in \mathbb{Z}$, $x + 2k\pi$ est une autre mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \cos(x + 2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2k\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

2. $A\ (1\,;\,0)$ donc : $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
$B\ (0\,;\,1)$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
$A'\ (-1\,;\,0)$ donc : $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
$B'\ (0\,;\,-1)$ donc : $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
3. Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

Or, $OM = 1$, $OH^2 = (\cos x)^2$ et $HM^2 = (\sin x)^2$. On a donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Dans toute la suite, on notera : $\cos^2 x = (\cos x)^2$ et $\sin^2 x = (\sin x)^2$. La relation précédente devient alors :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

2.2 Quelques relations

On a déjà les relations suivantes :

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \cos(x+2k\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ -1 \leq \cos x &\leq 1 \\ -1 \leq \sin x &\leq 1 \end{aligned}$$

On rappelle de plus que, si $\cos x \neq 0$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
Les cosinus, sinus et tangente des angles remarquables sont données dans le tableau 2.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

TABLE 2 – Valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente

Remarque : Pour retenir tous les résultats du tableau 2, on peut s'aider du cercle trigonométrique (voir figure 6).

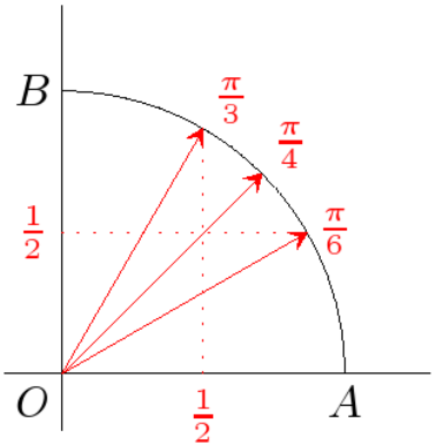

FIGURE 6 – Angles remarquables

Exercice : Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\beta$ sachant que :
- $\cos\alpha = 0,6$ et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$
- $\sin\beta = 0,8$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Exercices : 59, 60, 61 page 208 [7] – 44 page 206 et 89 page 211 [8][TransMath]

2.3 Angles associés

Dans toute cette section, x désigne un réel et M le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique suivant la **définition 2** du 2.1.

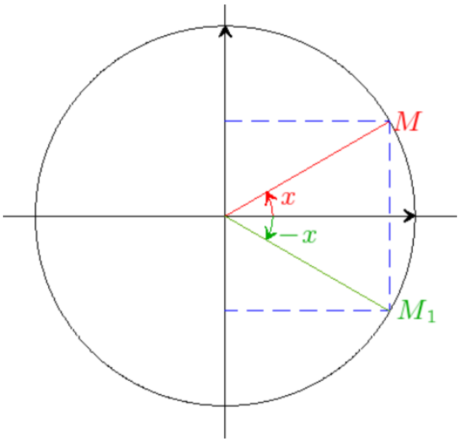

FIGURE 7 – Cosinus et sinus de $-x$

Cosinus et sinus de $-x$: voir figure 7.

M $(\cos x\,;\,\sin x)$ et M_1 $(\cos(-x)\,;\,\sin(-x))$.

Comme M et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses , on en déduit que :

Cosinus et sinus de $-x$

$$\begin{array}{rcl}\cos(-x) & = & \cos x \\ \sin(-x) & = & -\sin x\end{array}$$

Cosinus et sinus de $\pi - x$: voir figure 8.

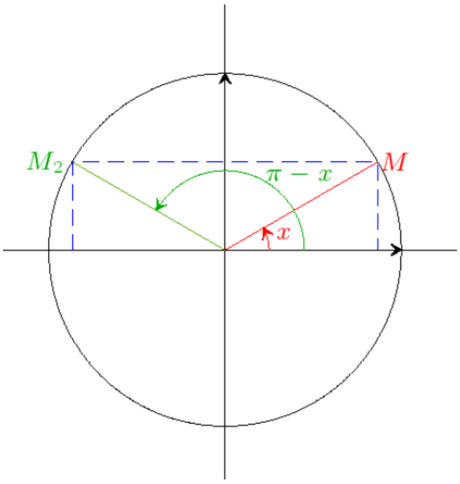

FIGURE 8 – Cosinus et sinus de $\pi - x$

M $(\cos x\,;\,\sin x)$ et M_2 $(\cos(\pi - x)\,;\,\sin(\pi - x))$.

Comme M et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées , on en déduit que :

Cosinus et sinus de $\pi - x$

$$\begin{array}{rcl}\cos(\pi - x) & = & -\cos x \\ \sin(\pi - x) & = & \sin x\end{array}$$

Cosinus et sinus de $\pi + x$: voir figure 9.

7. Lignes trigonométriques.
8. Repérage polaire.

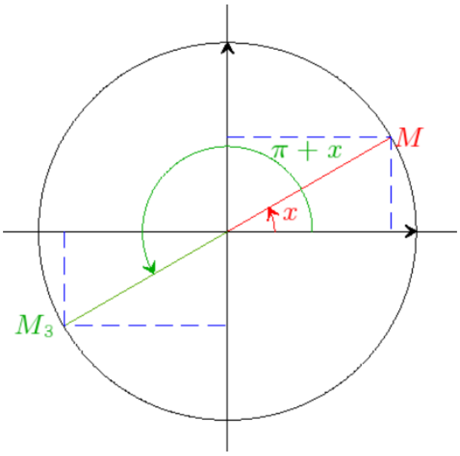

FIGURE 9 – Cosinus et sinus de $\pi + x$

$M\ (\cos x\,;\,\sin x)$ et $M_3\ (\cos(\pi + x)\ ;\ \sin(\pi + x))$.
Comme M et M_3 sont symétriques par rapport à l'origine du repère , on en déduit que :

Cosinus et sinus de $\pi + x$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$: voir figure 10.

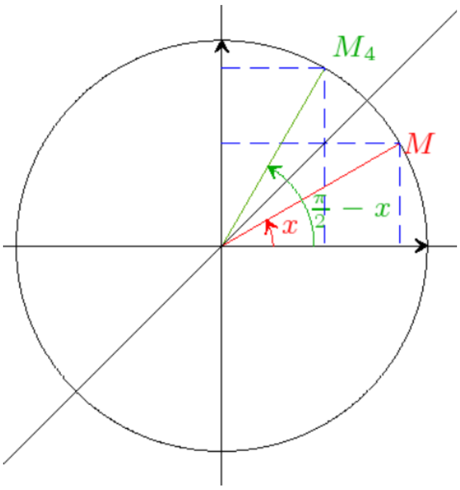

FIGURE 10 – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$

$M\ (\cos x\,;\,\sin x)$ et $M_4\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$.
Comme M et M_4 sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, on en déduit que :

Cosinus et sinus de $\pi + x$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$: voir figure 11.
$M\ (\cos x\,;\,\sin x)$ et $M_5\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\ ;\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)$.
Comme M_4 et M_5 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées , on en déduit que :

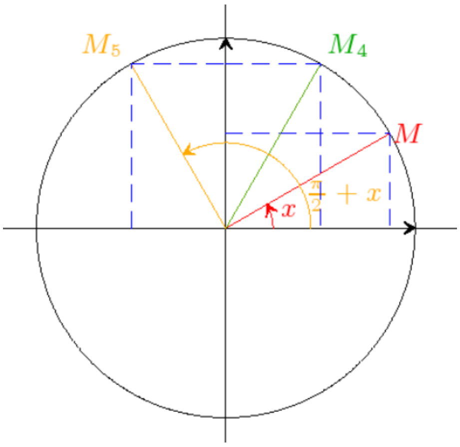

FIGURE 11 – Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2}+x$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2}+x$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

Remarque : Pour retenir ces relations, il est vivement conseillé de se référer au cercle trigonométrique.

Exemples : 1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

2. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercices : 1, 2, 3 page 197 et 63 page 208 [9] – 34, 35 page 208 et 21 page 202 [10] – 22 page 202 [11] – 5, 6, 7, 8 page 198 et 68, 69 page 208 [12] – 70 page 208 et 71, 72 page 209 [13] – 82, 83, 84, 85 page 210 [14] [TransMath]

3 Propriétés des angles orientés

3.1 Angles orientés et colinéarité

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

— Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0\,[2\pi]$.

— Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et sens contraires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi\,[2\pi]$.

Remarque : On peut donc utiliser les angles orientés pour prouver un parallélisme ou un alignement.

3.2 Relation de Chasles

Théorème : Relation de CHASLES (admis)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. Alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$$

9. Angles associés.
10. Lignes trigonométriques d'angles associés.
11. Utilisation d'angles orientés pour démontrer.
12. Équations trigonométriques.
13. Avec la calculatrice.
14. Équations plus difficiles.

Quelques conséquences : Ces égalités sont illustrées sur la figure 12.

1. $(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{u}) = -\,(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})\ [2\pi]$
2. $(\overrightarrow{u}\,,\,-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}) + \pi\ [2\pi]$ et $(-\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}) + \pi\ [2\pi]$
3. $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})\ [2\pi]$

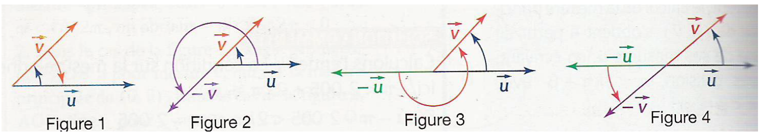

FIGURE 12 – Quelques cas particuliers

Exercices : 46 page 207[15] – 12, 13, 15 page 200 ; 20 page 202 et 49, 50, 51, 54, 55, 56 page 207[16] – 79, 80 page 210 et 90 page 211[17] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1^{re}S, édition 2011 (NATHAN)

3, 5, 7, 10, 11

15. Angles particuliers.
16. Démontrer en utilisant la relation de CHASLES.
17. Plus difficiles.