Probabilités :
Variable aléatoire

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2017/2018

Table des matières

1 Quelques rappels

1.1 Loi de probabilité

Définition : On appelle expérience aléatoire toute expérience ayant plusieurs issues (ou éventualités) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
Ces éventualités sont notées e_1 ; e_2 ; ... ; e_n.
Leur ensemble est noté Ω est est appelé univers.
On a donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définitions :
- Chaque éventualité e_i est affecté d'une probabilité, c'est-à-dire d'un nombre noté p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \qquad \text{et} \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

- On appelle loi de probabilité la donnée des p_i vérifiant ces conditions.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dits qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité p est équiprobable (ou équirépartie).

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face ayant les mêmes chances d'apparaître, chaque éventualité a une probabilité de $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : De manière générale, si une expérience aléatoire est équiprobable et comporte n issues différentes, chacune des issues a une probabilité de $\frac{1}{n}$.

1.2 Vocabulaire des événements

Définition : Un événement A est une partie de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).
$\varnothing$ est l'événement impossible.
Ω est l'événement certain.

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré.
- Des exemples d'événement :

A : « Obtenir un nombre pair »

B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »

B' : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 »

C : « Obtenir 7 »

D : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »

On a :
- A = $\{2 ; 4 ; 6\}$
- B = $\{1 ; 2\}$
- B' = $\{5 ; 6\}$
- C = $\varnothing$ (événement impossible)
- D = $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} = \Omega$ (événement certain)

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
- L'événement A$\cap$B est l'événement « A et B ».
- L'événement A$\cup$B est l'événement « A ou B ».
- L'événement $\overline{\text{A}}$ est l'événement « contraire de A » ou « non A ».
- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si A $\cap$ B $= \varnothing$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.

— A ∩ B est l'événement « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 2 ».
A ∩ B = {2}
— A ∪ B est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 2 ».
A ∪ B = {1 ; 2 ; 4 ; 6}
— $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
$\overline{\mathrm{A}} = \{1\,;\,3\,;\,5\}$
— Les événements B et B' sont incompatibles.

1.3 Probabilité d'un événement

Propriété : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le composent.
On la note $p(A)$.
On a donc $0 \leq p(A) \leq 1$.

Remarques : 1. $p(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω est un événement certain.
2. $p(\varnothing) = 0$. L'ensemble vide est un événement impossible.
3. Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p_i = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété : 1. Si A et B sont deux événements :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - p(\mathrm{A})$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 1.2
— $p(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
— $p(\mathrm{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}$
— $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (on retrouve ce résultat directement en détaillant l'événement A ∪ B.

Exercices : 1, 2 page 292 [1] – 3 page 292 [2] – 5, 6 page 292 ; 27, 28, 29, 30 page 304 ; 31, 33, 34, 35, 36 page 305 et 37 page 306 [3] [TransMath]

2 Variable aléatoire

2.1 Un exemple pour comprendre

Exemple : On lance trois pièces de monnaie équilibrées.
L'univers est : $\Omega = \{PPP\,;\, PPF\,;\, PFP\,;\, FPP\,;\, PFF\,;\, FPF\,;\, FFP\,;\, FFF\}$.
On gagne 1 € chaque fois que F apparaît et on perd 1 € chaque fois que P apparaît.
On note X la fonction qui, à chaque issue, associe le gain algébrique (positif ou négatif) correspondant.
X est appelée variable aléatoire sur Ω.
— Les valeurs possibles pour X sont $\{-3\,;\,-1\,;\,1\,;\,3\}$
— L'événement $X = -3$ est $\{PPP\}$. Sa probabilité est $p(X = -3) = \frac{1}{8}$.
— L'événement $X = -1$ est $\{PPF\,;\, PFP\,;\, FPP\}$. Sa probabilité est $p(X = -1) = \frac{3}{8}$.
— L'événement $X = 1$ est $\{FFP\,;\, FPF\,;\, PFF\}$. Sa probabilité est $p(X = 1) = \frac{3}{8}$.
— L'événement $X = 31$ est $\{FFF\}$. Sa probabilité est $p(X = 3) = \frac{1}{8}$.
On résume ceci dans un tableau, appelé loi de probabilité de la variable aléatoire X :

gain x_i	-3	-1	1	3
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

1. Expérience aléatoire et probabilité.
2. Événements.
3. Calcul de probabilités.

2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle variable aléatoire X toute fonction définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On note x_1 ; x_2 ; ... ; x_n les valeurs prises par X.
  On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui, à chaque x_i, associe la probabilité de l'événement $p(X = x_i)$.
  On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque : On a $\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$.

Exercices : 1, 2, 3 page 296 et 44 page 307[4] – 14 page 300[5] [TransMath]

3 Paramètres d'une variable aléatoire

3.1 Espérance, variance, écart-type

Définition : Avec les notations précédentes, on appelle :

- Espérance mathématique de X :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

- Variance de X :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

- Écart-type de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : On reprend l'exemple du 2.1.

$$E(X) = (-3) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0$$

Le jeu est équitable.

$$V(X) = \frac{1}{8}(-3-0)^2 + \frac{3}{8}(-1-0)^2 + \frac{3}{8}(1-0)^2 + \frac{1}{8}(3-0)^2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \simeq 0,79$$

Remarques :

1. — Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.
   — Si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.
   — Si $E(X) = 0$, le jeu est équitable.
2. Lors de la répétition, un grand nombre de fois, de l'expérience dans les même conditions, la moyenne des valeurs obtenues par X se rapproche de l'espérance mathématique de X.

Module : 18 page 302[6] – 19 page 303[7] – 67 page 313[8] [TransMath]

Exercices : 4, 5, 6 page 297 ; 13 page 300 ; 39, 40, 42 page 306 ; 45, 46 page 307 et 62, 65 page 312[9] – 15 page 300 et 48 page 308[10] [TransMath]

4. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.
5. Variable aléatoire et situation géométrique.
6. Afficher les indicateurs d'une variable aléatoire.
7. Lien entre espérance mathématique et moyenne.
8. Simulation.
9. Paramètres de variables aléatoires
10. Jeu équitable.

3.2 Formules sur l'espérance et la variance

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω. On suppose que X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Soient a et b deux nombres réels.
On construit une nouvelle variable aléatoire Y en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre $y_i = ax_i + b$.
Cette variable aléatoire est notée $aX + b$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
Pour tous nombres a et b :

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Exercices : 7, 8 page 298 ; 49 page 308 ; 51, 53, 54 page 309 et 55 page 310 [11] – 56 page 310 [12] – 57 page 311 [13] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1reS, édition 2011 (Nathan)

3, 4, 5

11. Interpréter l'espérance mathématique.
12. Algorithmique.
13. R.O.C.