Suites numériques :
Définitions, suites arithmétiques et géométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2017/2018

Table des matières

Liste des algorithmes

En préliminaire au cours, sur la feuille polycopiée « Activités – Suites numériques » :
- Activité 1 : *Des chiffres et leur place*
- Activité 2 : *Des nombres obtenus par un procédé*

1 Notion de suite numérique

1.1 Définition

Définition : Une suite numérique est une liste indexée de nombres.
Elle a un premier terme, un deuxième terme, etc.

Exemples :
1. La suite des multiples de 7 : 0, 7, 14, ...
2. La suite des nombres entiers impairs : 1,3, 5, 7, ...
3. La suite définie par $u_n = n^2 + 1$.

Notations :
- On utilise généralement les lettres u, v, w, ... pour caractériser une suite.
- u_n est appelé terme d'indice n (ou de rang n) de la suite.
- La suite dans sa globalité est notée u ou (u_n).

Remarque : Dans beaucoup de cas, on commencera l'indexation à l'indice zéro. Dans ce cas :
u_0 est le premier terme ;
u_1 est le deuxième terme ;
u_2 est le troisième terme ; etc.
Il ne faut donc pas confondre le terme d'indice n de la suite et son $n^{\text{ième}}$ terme.

1.2 Modes de génération d'une suite

Exemple 1 : A l'aide d'une formule explicite
Soit (u_n) la suit définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.
On a : $u_0 = -0^2 + 0 - 2 = 2$; $u_1 = -1^2 + 1 - 2 = -2$; $u_2 = -2^2 + 2 - 2 = -4$; $u_5 = -5^2 + 5 - 2 = -22$; etc.

Remarque : La suite est donc de la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction.
On peut donc représenter graphiquement la suite comme on représenterait la fonction f, mais en se limitant aux images de nombre entier (et donc sans relier les points obtenus).

Exemple 2 : A l'aide d'un procédé
Soit (v_n) la suite de premier terme $v_0 = 5$ et dont le terme suivant est obtenu en ajoutant 3 puis en divisant par 2.
On a : $v_1 = \frac{v_0+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $v_2 = \frac{v_1+3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$; $v_3 = \frac{v_2+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}+3}{2} = \frac{13}{4}$ et, plus généralement $v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2}$.

Remarques :
1. Dans ce cas, le terme d'indice n est calculé à partir du terme précédent. On calcule donc les termes de (v_n) de proche en proche (avant de calculer v_5, il faut déjà avoir calculé v_4, v_3, etc.). Une telle relation est appelée formule de récurrence.
2. On notera la suite (v_n) de la façon suivante :
$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{v_n+3}{2} \end{cases}$$
On a donc $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = \frac{x+3}{2}$.
3. Une méthode donnant la représentation graphique d'une suite définie par récurrence sera vue en Module.
4. On peut utiliser la calculatrice pour calculer des termes d'une suite, même définie par récurrence. Voir rabats de couverture du [TransMath].

Module : TP 35 page 130 [1] – TP 36 page 131 [2] [TransMath]

1. Étude graphique d'une suite définie par récurrence.
2. Évaluer le terme d'indice n d'une suite définie par récurrence.

Exercices : 47, 48, 50, 51, 54, 55, 56, 58 page 132 60 page 133 [3] – 52 page 132 [4] – 123 page 137 [5] [TransMath]

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.

Exemples :
1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, ... est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$
est arithmétique de raison (-3).
3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3,4, 5, ... est arithmétique de raison 1.
4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Propriété : Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout entier n.
Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemples :
1. Soit u la suite définie par $u_n = 3n - 2$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - (3n-2) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 \end{aligned}$$
La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
2. Soit v la suite définie par $v_n = n^2$.
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \end{aligned}$$
Le résultat dépend de n, la suite n'est donc pas arithmétique.
3. Soit w la suite définie par :
$$\begin{cases} w_0 = -1 \\ w_{n+1} = w_n + \sqrt{2} \end{cases}$$
Par définition, la suite est arithmétique de raison $\sqrt{2}$.

Exercices : 1, 2, 3, 4, 6 page 123 et 62 page 133 [6] [TransMath]

2.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On a :

$u_1 = u_0 + r$ $\qquad$ $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$ $\qquad$ $u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

3. Calculs de termes.
4. Changement d'indice.
5. Une suite périodique.
6. Déterminer si une suite est arithmétique ou non.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarques : 1. En particulier, la représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.

2. Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n - p)\,r$.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (-2).
On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.
En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.

Exercices : 65, 66 page 133 [7] – 12, 13, 15 page 125 et 67, 68, 70, 73, 75 page 133 [8] – 77, 79 page 133 et 131 page 137 [9] – 80 page 134 [10] – 30 page 128 et 124, 125, 127 page 137 [11][TransMath]

2.3 Somme des entiers de 1 à n

Propriété : Soit S_n la somme des entiers de 1 à n.

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Alors, on a :

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

En effet :

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
\oplus & S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & & & (n+1)
\end{array}$$

Il s'agit d'une somme de n termes, tous égaux à $(n+1)$, on a donc :

On a donc :

$$2S_n = n\,(n+1)$$

soit, en divisant par 2 :

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Remarque : Cette démonstration est *exigible* et, de plus, son principe sera utilisé en exercices pour déterminer des sommes de termes de n'importe quelle suite arithmétique.

Exercices : 19, 21 page 126 et 102, 103, 105, 106 page 135 [12] – 29 page 128 et 104, 107 page 135 [13] – 119 page 136 [14] [TransMath]

7. Déterminer u_n en fonction de n.
8. Déterminer la raison ou un des termes d'une suite arithmétique.
9. Une suite intermédiaire.
10. Une situation géométrique.
11. Termes en progression arithmétique.
12. Somme de termes d'une suite arithmétique.
13. Déterminer le nombre de termes.
14. ROC

3 Suites géométriques

3.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé raison de la suite.

Exemples :
1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases}$$
est arithmétique de raison $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (-1).
4. On augmente tous les ans une quantité de 5%. La suite obtenue est $u_{n+1} = 1,05u_n$. C'est donc une suite géométrique de raison $1,05$.
5. Pour montrer qu'une suite est géométrique, on essaiera de mettre son terme général sous la forme $u_{n+1} = q \times u_n$.

Exemples :
1. Soit u la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$.
$$u_{n+1} = 5 \times 3^{n+3} = 5 \times 3^{n+2} \times 3 = 3 \times \left(5 \times 3^{n+2}\right) = 3u_n$$
La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$.
2. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$
$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} = \frac{3^n \times 3}{4^{n+1} \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{4}u_n$$
La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$.

Exercices : 7, 8, 9, 10 page 124 et 83, 84 page 134[15] [TransMath]

3.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
On a :

$$u_1 = u_0 \times q \qquad u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2 \qquad u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) \times q = u_0 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
On a : $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$.
En particulier : $u_{10} = 3 \times 2^{10} = 3072$.

Exercices : 16, 17, 18 page 125 et 85, 87, 88, 91 page 134[16] – 89, 90 page 134[17] – 93, 94 page 134[18] –96, 97 page 135[19] – 31 page 128 et 132, 134 page 137[20] – 138 page 138 et 141 page 139[21] [TransMath]

15. Déterminer si une suite est géométrique.
16. Calculs de termes.
17. Déterminer la raison d'une suite géométrique.
18. Termes en progression géométrique.
19. Augmentations en pourcentages.
20. Avec une suite intermédiaire.
21. Applications.

3.3 Somme des puissances successives

Théorème : La somme des puissances successives d'une nombre q, avec $q \neq 1$, s'exprime sous la forme :Alors, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

En effet, si on note $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & S & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ \ominus & qS & = & & & q & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline & S - qS & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & \left(-q^{n+1}\right) \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 - q^{n+1} \\ (1-q)\,S &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

et, comme $q \neq 1$, $1 - q \neq 0$. D'où :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Cette démonstration est *exigible* et cette formule sera utilisée en exercices pour calculer des sommes de termes d'une suite géométrique.

Exercices : 22, 23, 24 page 126 ; 109, 11, 112 page 135 et 118 page 136 [22] – 120 page 136 [23] – 109 page 135 ; 117 page 136 ; 140 page 138 et 142 page 139 [24] [TransMath]

4 Suites et algorithmique

Voici quelques algorithmes classiques sur le calcul de termes et de somme de termes de suites définies par récurrence.

Exemple 1 : L'algorithme 1 calcule le terme d'indice n de la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et telle que $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

Algorithme 1 Calcul de termes d'une suite : premier terme u_0

```
u ← 2
Pour i allant de 1 à n :
   u ← (u+1)/2
FinPour
```

Exemple 2 : L'algorithme 2 calcule le terme d'indice n de la suite (t_n) de premier terme $t_1 = 1$ et telle que $t_{n+1} = -\frac{1}{2}t_n^2 + t_n$.

Algorithme 2 Calcul de termes d'une suite : premier terme t_1

```
t ← 1
Pour i allant de 2 à n :
   t ← -½t²+t
FinPour
```

Exemple 3 : L'algorithme 3 calcule la somme des n premiers termes (de u_0 à u_{n-1}) de la suite (u_n) de l'exemple 1.

22. Sommes de termes.
23. ROC.
24. Applications.

Algorithme 3 Calcul d'une somme de termes

```
u ← 2
S ← 2
Pour i allant de 1 à n-1 :
   u ← (u+1)/2
   S ← S+u
FinPour
```

Exercice : Modifier l'algorithme de l'exemple 2 pour qu'il calcule la somme des n premiers termes (de t_1 à t_n) de la suite de l'exemple 2.

Exercices : 61 page 133 [25] – 115, 116 page 136 [26] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1^re^S, édition 2011 (Nathan)

2, 3, 4, 5, 6, 7

25. Obtenir des termes choisis.
26. Calcul d'une somme.