# Probabilités :<br>Loi binomiale

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2017/2018

## Table des matières



## Table des figures

*en préliminaire au cours :*

**Activités :** Activités 1 page 316 [1] [TransMath]

# 1 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

## 1.1 Définition

**Définition :** — Il y a répétition d'expériences identiques lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.

— Des expériences aléatoires sont indépendantes si l'issue de l'une quelconque de ces expériences ne dépend pas de l'issue des autres expériences.

**Exemple :** Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules noires. On tire successivement deux boules *avec remise*.
Il y a bien répétition de deux expériences identiques et indépendantes.

**Remarque :** Si le tirage avait été sans remise, les expériences n'auraient été ni identiques (pas le même nombre de boules pour le deuxième tirage), ni indépendantes (la répartition des boules du deuxième tirage dépend de la couleur de la première boule tirée).

## 1.2 Modélisation d'une répétition

On utilise un arbre pondéré pour représenter cette répétition. Sur chaque branche, on indique la probabilité de l'issue correspondante.

**Exemple :** On reprend l'exemple précédent. On obtient l'arbre pondéré de la figure 1.

**Propriété :** — La probabilité d'un événement sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées sur ses branches.

— La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en ajoutant les probabilités de chaque chemin.

**Exemple :** On reprend l'exemple précédent.

— La probabilité de tirer une boule verte puis une boule rouge est :

$$p\,(V1, R2) = \frac{3}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$$

— La probabilité de tirer deux boules de même couleur est :

$$\begin{aligned} p &= p\,(R1, R2) + p\,(V1, V2) + p\,(N1, N2) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{16 + 9 + 4}{81} = \frac{29}{81} \end{aligned}$$

**Exercices :** 2, 4 page 325 ; 31, 33 page 336 et 35 page 337 [2] – 20 page 332 et 36, 37 page 337 [3] [TransMath]

# 2 Loi de Bernoulli

**Définition :** — On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve à deux issues possibles : un succès (noté $S$) ou un échec (noté $\overline{S}$).

— La loi de Bernoulli est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y$ prenant la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si l'issue est un échec.
On note $p = p\,(Y = 1) = p\,(S)$.
$p$ est appelé paramètre de la loi de Bernoulli.

— On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire $Y$ suit la loi de Bernoulli.

**Remarques :** 1. On peut représenter la loi de Bernoulli par l'arbre pondéré de la figure 2.

1. Simulation de la loi du nombre de succès.
2. Répétition d'expériences identiques et indépendantes.
3. Loi géométrique tronquée.

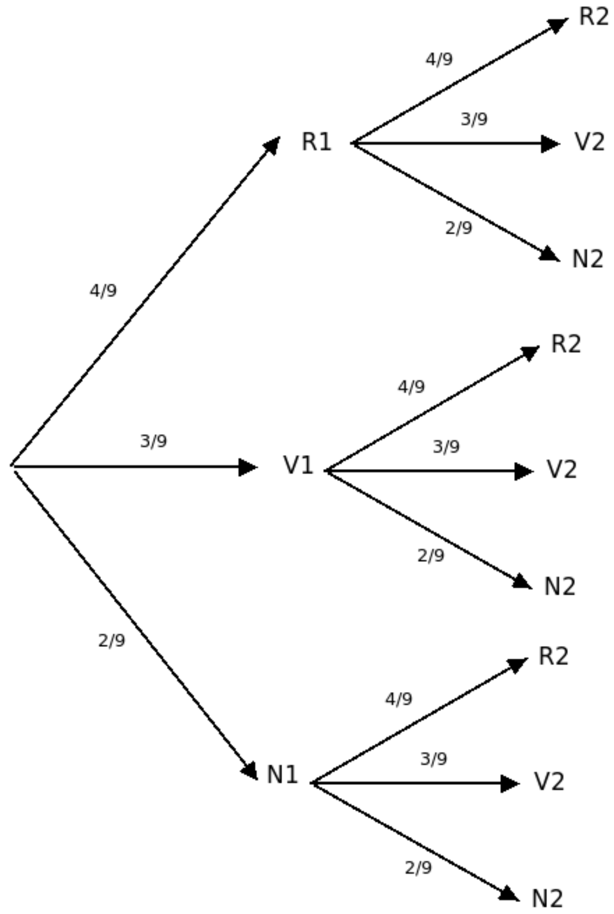


FIGURE 1 – Répétition d'expériences identiques et indépendantes

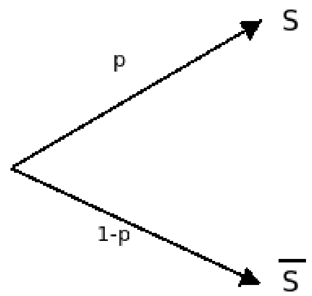


FIGURE 2 – Loi de BERNOULLI

2. La loi de probabilité de $Y$ est alors :

| $k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(Y=k)$ | $1-p$ | $p$ |

**Exemple :** On lance un dé équilibré à six faces, les faces étant numérotés de 1 à 6.
On considère qu'il y a un succès lorsque le résultat du lancer est un 6, un échec sinon.
Il s'agit d'une épreuve de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{6}$.
Elle correspond à la loi de Bernoulli :

| $k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(Y=k)$ | $\dfrac{5}{6}$ | $\dfrac{1}{6}$ |

**Propriété :** Soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $p$.

$$E(Y)=p \qquad \text{et} \qquad V(Y)=p(1-p)$$

**Démonstration :**

$$E(Y)=p(Y=0)\times 0+p(Y=1)\times 1=p\times 1=p$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= p(Y=0)\times(0-E(Y))^2+p(Y=1)\times(1-E(Y))^2 \\ &= (1-p)\times p^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)[p+1-p]=p(1-p) \end{aligned}$$

# 3 Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

**Activité :** Activité 2 page 317[4] [TransMath]

## 3.1 Un exemple pour comprendre

**Exemple :** On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois fois de suite un dé à 6 faces non truqué. La variable aléatoire $X$ représente le nombre de fois que le numéro 6 est sorti au cours de ces 3 lancers.
On peut modéliser cette expérience par une répétition indépendante de l'épreuve de BERNOULLI de l'exemple du 2.
On obtient l'arbre pondéré de la figure 3.
La variable aléatoire $X$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2 ou 3.

— $X=0$ correspond à l'événement $\left\{\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\right\}$.
On a donc :

$$p(X=0)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

— $X=1$ correspond à l'événement $\left\{S\,\overline{S}\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,S\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,\overline{S}\,S\right\}$.
On a donc :

$$p(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$$

— $X=2$ correspond à l'événement $\left\{S\,S\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,S\,S\,;\,S\,\overline{S}\,S\right\}$.
On a donc :

$$p(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$$

$X=3$ correspond à l'événement $\{S\,S\,S\}$.
On a donc :

$$p(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

4. La planche de GALTON.

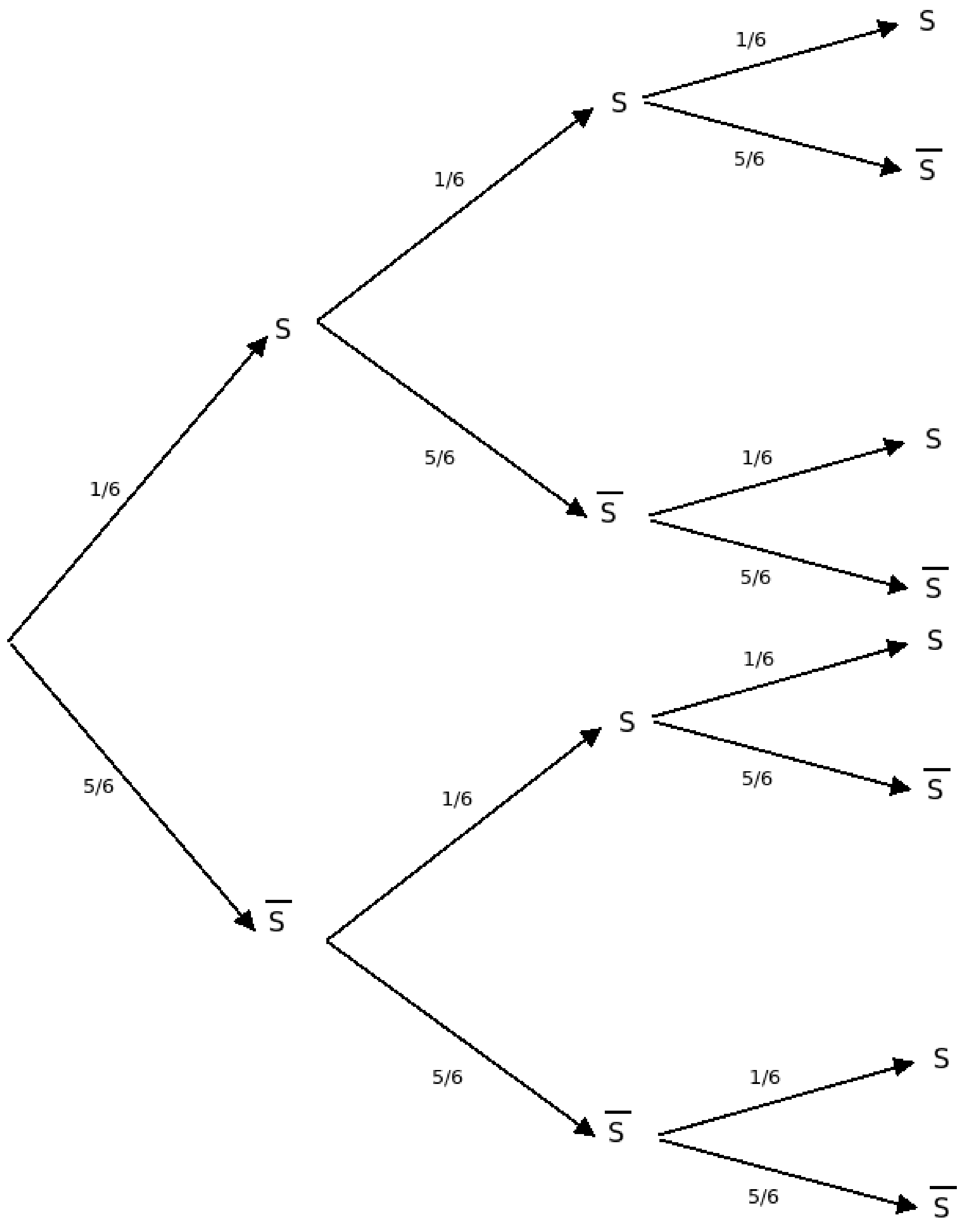


Figure 3 – Un exemple de schéma de Bernoulli

## 3.2 Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

**Définition :** — On appelle schéma de BERNOULLI d'ordre $n$ l'expérience consistant à répéter $n$ fois de manière indépendantes la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.
— La loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ prenant prenant comme valeurs le nombre de succès $(S)$ obtenus au cours des $n$ épreuves du schéma de Bernoulli.
— On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

**Remarque :** Dans l'exemple du 3.1, on a donc un schéma de BERNOULLI d'ordre 3.
La variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{6}$.

**Définition :** Le nombre de chemins de l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli d'ordre $n$ conduisant à $k$ succès pour $n$ répétitions est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Les nombres entiers $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.

**Remarques :** 1. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ se lit « $k$ parmi $n$ »

2. Grâce au 3.1, on a déjà trouvé que $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ ; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ ; $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$.

3. On peut utiliser la calculatrice pour trouver les coefficients binomiaux. Voir le TP 23 page 334 [5] [TransMath].

**Propriété :** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

1. Les valeurs de $X$ sont $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}$
2. Pour tout $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,n\}$ :

$$p\,(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\,(1-p)^{n-k}$$

**Remarque :** On peut utiliser la calculatrice pour trouver calculer des probabilités suivant une loi binomiale. Voir le TP 23 page 334 [6] [TransMath].

**Exercices :** 5, 6, 7 page 327 ; 18, 19 page 332 et 51, 52 page 339 [7] – 44, 46, 47 et 53 page 339 [8] [TransMath]

## 3.3 Espérance, variance, écart-type

**Propriété :** (admis)
Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.
— Son espérance est : $E\,(X) = np$
— Sa variance est : $V\,(X) = np\,(1-p)$
— Son écart-type est : $\sigma\,(X) = \sqrt{np\,(1-p)}$

**Exercices :** 9, 10 page 328 et 52 page 339 [9] [TransMath]

5. Calculer des probabilités suivant une loi binomiale.
6. Calculer des probabilités suivant une loi binomiale.
7. Utiliser la loi binomiale.
8. Utilisation de la calculatrice.
9. Espérance d'une loi binomiale.

### 3.4 Compléments sur les coefficients binomiaux

**Propriété :** Soit $n$ un entier naturel, $n \geq 1$.

1. $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$.
2. Si $k$ est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$ :
$$\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$
3. Si $k$ est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$ :
$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

**Démonstration :**

1. Dans l'arbre, un seul chemin réalise 0 succès et un seul chemin réalise $n$ succès.

2. Comme $n-k$ succès correspondent à $k$ échecs, il y a autant de chemins menant à $k$ succès qu'à $n-k$ succès.

3. $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins qui réalisent $k+1$ succès parmi $n+1$ répétitions. Il y en a de deux types :

(a) ceux qui commencent par un succès : il reste alors $k$ succès parmi $n$ répétitions. leur nombre est donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

(b) ceux qui ne commencent pas par un succès : il reste alors $k+1$ succès parmi $n$ répétitions. leur nombre est donc $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$.

**Exemple :** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$

**Remarque :** En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ de proche en proche. Les résultats sont détaillés dans le tableau 1, appelé triangle de PASCAL.

| $n$ \ $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

TABLE 1 – Triangle de PASCAL

**Exercices :** 56 page 340 ; 59, 60 page 341 et 64 page 342 [10] [TransMath]

10. Utilisation des formules sur les $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

# 4 Intervalle de fluctuation et prise de décision

## 4.1 Quelques rappels de Seconde

**Définitions :**
1. On appelle échantillon de taille $n$ la série statistique formée des résultats obtenus lorsqu'on répète $n$ fois une expérience dans les mêmes conditions.
2. La distribution de fréquences associée à l'échantillon est le tableau des fréquences issues de cette échantillon.

**Exemple :** On lance dix fois de suite une pièce bien équilibrée. On obtient P (Pile), F (Face), F, F, P, P, F, P, F, F.
Il s'agit d'un échantillon de taille 10 (on a répété l'expérience 10 fois).
La distribution de fréquences est :

| Résultat | Pile | Face |
|---|---|---|
| Effectif | 4 | 6 |
| **Fréquence** | **0,4** | **0,6** |

**Remarques :**
1. Les distributions de fréquences varient d'un échantillon à l'autre pour la même expérience. C'est ce qu'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.
2. Même pour des échantillon de même taille, la distribution de fréquences peut varier.
3. Lorsque la taille de l'échantillon augmente, les distributions de fréquences ont tendance à se stabiliser. Plus précisément, on a la propriété suivante, vue en classe de Seconde :

**Propriété :** (admise)
Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est $p$.
Si $0,2 \leq p \leq 0{,}8$ et si $n \geq 25$, alors 95 % des échantillons de taille $n$ auront une distribution de fréquence dans la quelle la fréquence du caractère sera dans l'intervalle :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

## 4.2 Intervalle de fluctuation à 95 % selon la loi binomiale

**Définition :** Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est $p$.
L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence, pour un échantillon de taille $n$, selon la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ est :

$$\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a : & \text{plus petit entier tel que } p\,(X \leq a) > 0,025 \\ b : & \text{plus petit entier tel que } p\,(X \leq b) \geq 0,975 \end{cases}$$

**Remarque :** On admettra que si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n\,(1-p) \geq 5$, cet intervalle de fluctuation est sensiblement le même que celui vu en Seconde.

**Exercice :** 63 page 341[11] [TransMath]

## 4.3 Prise de décision à partir d'un échantillon

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est $p$.
On observe la fréquence $f$ de ce caractère dans un échantillon de taille $n$ et on considère l'hypothèse « la proportion de ce caractère dans la population est $p$ ».

On a alors la règle de décision suivante :

11. Comparaison d'intervalles de fluctuation à 95 %.

— Si $f \in \left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$ : on considère que l'hypothèse n'est pas remise en question et l'on accepte au seuil de risque de 5 % ;
— Si $f \notin \left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$ : on rejette l'hypothèse au seuil de risque de 5 %.

**Module :** TP 24 page 335 [12] [TransMath]

**Exercices :** 11, 13 page 330 et 61, 62 page 341 [13] [TransMath]

## Références

[TransMath] transMATH 1^re^S, édition 2011 (Nathan)

2, 4, 6, 7, 8, 9

12. Un dé truqué ?
13. Prise de décision à partir d'un échantillon.