Produit scalaire

Christophe ROSSIGNOL[*]

Année scolaire 2017/2018

Table des matières

Table des figures

1 Différentes expressions du produit scalaire

1.1 Norme d'un vecteur

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A, B deux points tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$.
On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ la longueur AB et on note : $\|\overrightarrow{u}\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est unitaire si $\|\overrightarrow{u}\|=1$.

Propriété : Norme d'un vecteur
Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ *orthonormé*, la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est :

$$\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Remarque : Dans un repère orthonormal, il s'agit d'une application du théorème de PYTHAGORE. Ce qui explique que cette relation ne soit valable que dans un tel repère...

1.2 Définition triangulaire du produit scalaire

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right]$$

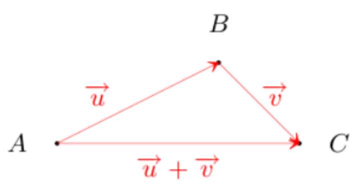

FIGURE 1 – Définition triangulaire du produit scalaire

Remarques : 1. « $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ » si lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ».

2. Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.
3. $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.
4. Attention ! Le produit scalaire est une loi externe : le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

1.3 Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété : Soit $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ un repère orthonormé.
Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=xx'+yy'$.

Démonstration :
Comme le repère est orthonormé : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$.
De plus, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2xx' + 2yy'\right] \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

1.4 Expression à l'aide de projections

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors :
— Si H et B sont du même côté de A (voir figure 2), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AH$;
— Si H et B sont de part et d'autre de A (voir figure 3), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AH$.
— Si H et A sont confondus, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

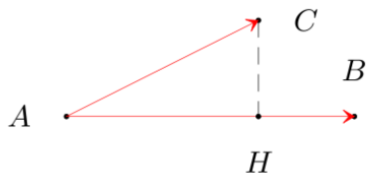

Figure 2 – Expression à l'aide de projections – Cas 1

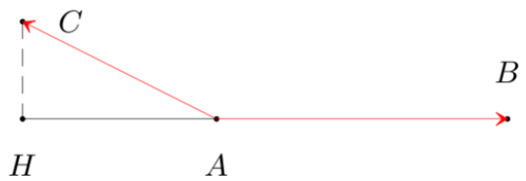

Figure 3 – Expression à l'aide de projections – Cas 2

Démonstration :
Soit $(A\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ le repère orthonormé tel que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires et de même sens.
Par suite, $B\ (x_B\,;\,0)$ (avec $x_B > 0$) et $C\ (x_C\,;\,y_C)$.
D'après 1.3, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_B x_C + 0 \times y_C = x_B x_C$.
Si H et B sont du même côté de A, $x_C > 0$ donc $x_C = AH$ et $x_B = AB$. Par suite, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AH$.
Si H et B sont de part et d'autre de A, $x_C < 0$ donc $x_C = -AH$ et $x_B = AB$. Par suite, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AH$.
Si H et A sont confondus, les vecteurs sont orthogonaux donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

1.5 Expression trigonométrique

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| . \cos\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$$

Démonstration (plan) :
Si l'un des deux vecteurs est nul, le résultat est évident.
Sinon, il suffit de reprendre les deux cas précédents en remarquant que le triangle ACH est rectangle en H. Si on note $\theta = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$:
Dans le cas 1 (voir figure 2), $\cos\theta = \frac{AH}{AC}$, d'où $AH = AC\cos\theta$. On obtient :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AH = AB \times AC\cos\theta = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$$

.
Dans le cas 2 (voir figure 3), $\cos(\pi-\theta) = \frac{AH}{AC}$, d'où $AH = AC\cos(\pi-\theta) = -AC\cos\theta$. On obtient :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -AB \times AH = -AB \times (-AC\cos\theta) = AB \times AC\cos\theta = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$$

.

Remarque : Dans le cas particulier où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on obtient le résultat suivant :
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\|$;
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\|$.

Exercices : 1, 2, 3, 4 page 220 et 40, 41 page 230 [1] – 5, 7, 8, 10 page 221 et 42, 43, 45, 47 page 230 [2] – 11, 13 page 222 [3] [TransMath]

2 Règles de calcul sur le produit scalaire

Propriété 1 : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$$

Remarque : On dit que le produit scalaire est commutatif. Cette propriété est évidente à montrer à l'aide de la définition triangulaire du produit scalaire.

Propriété 2 : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel.

1. $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
2. $\left(k\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = k \times \left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)$ et $\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right) = k \times \left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)$

Remarques :
1. On dit que le produit scalaire est bilinéaire. Cette propriété est simple à montrer en utilisant la définition du produit scalaire dans un repère orthonormé.
2. Ces règles de calcul ressemblent aux règles « habituelles » sur les nombres. Il y a cependant une nuance importante :

$$\underbrace{\left(k\overrightarrow{u}\right)}_{\text{vecteur}} . \underbrace{\overrightarrow{v}}_{\text{vecteur}} = \underbrace{k}_{\text{nombre}} \times \underbrace{\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)}_{\text{nombre}}$$

Exercices : 49, 50, 52, 53, 55 page 231 [4] [TransMath]

1. Choisir l'expression la mieux adaptée.
2. Calculer à partir du produit scalaire.
3. Avec des projections.
4. Règles de calcul.

3 Produit scalaire et orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note A, B, C et D les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarques : 1. Ceci signifie que les directions des deux vecteurs sont orthogonales.
2. Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs.

3.2 Produit scalaire et orthogonalité

Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration :
Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, le résultat est évident.
Sinon, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$ et $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$. On a donc $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, ce qui équivaut à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Conséquences : 1. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
2. Soit $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé.Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Exercices : 14, 16 page 223 et 58, 60 page 231 [5] – 57 page 231 ; 25, 26 page 226 et 62, 63 page 232 [6] – 80, 81 page 234 ; 91 page 235 et 92, 93 page 236 [7] [TransMath]

4 Quelques compléments sur les droites

Dans toute cette section, on se place dans un repère $(O\,;\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{\jmath})$ orthonormé.

4.1 Vecteur normal à une droite

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une droite.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ si la direction de $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à $\mathcal{D}$.

Propriété : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration :
Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = -b \times a + a \times b = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
Par suite, $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

5. Utiliser l'orthogonalité pour calculer un produit scalaire.
6. Orthogonalité, applications.
7. Étude de configurations.

Exercice résolu : Trouver une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\ (3\,;\,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$$M\ (x\,;\,y) \in \mathcal{D} \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ orthogonaux}$$

Autrement dit :

$$M\ (x\,;\,y) \in \mathcal{D} \quad \text{si et seulement si} \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$$

Or, ici : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 1\times(x-3)+(-1)\times(y-1) &= 0 \\ x-3-y+1 &= 0 \\ x-y-2 &= 0 \end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{D}$ est donc : $x-y-2=0$.

Exercices : 18, 19, 20 page 224 et 69, 70, 71 page 232 [8] – 74 page 233 ; 27 page 226 et 104 page 237 [9] – 77 page 233 [10] [TransMath]

4.2 Droites perpendiculaires

Propriété : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $a'x+b'y+c'=0$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa'+bb'=0$.

Démonstration :
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
$\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}'$.
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=0$.
On obtient donc : $aa'+bb'=0$.

Remarque : Si la droite $\mathcal{D}$ admet comme équation réduite $y=mx+p$ et la droite $\mathcal{D}'$ comme équation réduite $y=m'x+p'$ alors la propriété devient :

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont perpendiculaires si et seulement si } mm'=-1.$$

Exercice : 17 page 224 [11] – 95 page 236 [12] – 103 page 237 [13] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1$^{\text{re}}$S, édition 2011 (Nathan)

4, 5, 6

8. Équations de droites
9. Droites remarquables d'un triangle.
10. Tangente à un cercle.
11. Droites perpendiculaires.
12. Distance d'un point à une droite.
13. Droites concourantes