# Applications du produit scalaire

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2014/2015

---

## Table des matières



## Table des figures



---

*en préliminaire au cours :*

**Activités :** Activités 1 [1] et 2 [2] page 241 [TransMath]

# 1 Relations métriques dans un triangle quelconque

## 1.1 Quelques notations

Soit $ABC$ un triangle quelconque (voir figure 1).
On note : $a = BC$ ; $b = AC$ ; $c = AB$ et $\widehat{A} = \widehat{BAC}$ ; $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ ; $\widehat{C} = \widehat{BCA}$.

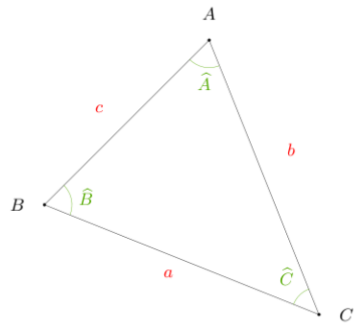


FIGURE 1 – Notations – Relations métriques dans un triangle quelconque

## 1.2 Formule des cosinus (ou formule d'Al-Kashi)

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Par suite :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= \overrightarrow{BC}^{\,2} \\
a^2 &= \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \\
a^2 &= \overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^{\,2} \\
a^2 &= AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos\widehat{BAC} + AB^2 \\
a^2 &= b^2 - 2bc\cos\widehat{A} + c^2 \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient :

**Théorème :** Formule des cosinus
Soit $ABC$ un triangle quelconque. Avec les notations du 1.1, on a :

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\
c^2 &= a^2 + a^2 - 2ab\cos\widehat{C}
\end{aligned}$$

**Remarque :** Si le triangle $ABC$ est rectangle en $A$, alors $\cos\widehat{A} = 0$. La formule d'AL-KASHI devient alors :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

On retrouve donc le résultat du théorème de PYTHAGORE.

**Exercices :** 1, 2, 3, 4 page 245 et 49, 52 page 256 [3] – 56 page 256 et 59 page 257 [4] [TransMath]

1. Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$.
2. Calculer dans un triangle.
3. Calculs de longueurs et d'angles.
4. Pour aller plus loin.

# 2 Équations de cercle

Dans toute cette section, on se place dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ orthonormal.

## 2.1 Connaissant le centre et le rayon

**Exemple :** On veut déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(-1\,;\,2)$ et de rayon 3.

$M\ (x\,;\,y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M = 3$, d'où $\Omega M^2 = 3^2 = 9$.

De plus , $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ donc $\Omega M^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$.

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est donc : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$.

**Remarque :** Après développement et simplification, cette équation devient : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

**Propriété :** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega\ (\alpha\,;\,\beta)$ et de rayon $R$.
Alors, une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

**Remarques :**

1. La démonstration de cette propriété reprend exactement la même démarche que celle de l'exemple. Elle peut être traitée en exercice.
2. Cette propriété montre que tout cercle admet une équation de la forme : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Reste à étudier une tentative de réciproque : toute équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est-elle l'équation d'un cercle ?

**Exemple :** Montrer que l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Méthode :** On va essayer de mettre l'équation sous la forme $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.
Pour cela, on va considérer $x^2 - 2x$ et $y^2 + 4y$ comme les deux premiers termes du développement d'un carré [a].

a. Voir le chapitre « Polynômes - Second degré » pour de plus amples renseignements sur la forme canonique.

— $\left(x^2 - 2x\right)$ est le début du développement de $(x-1)^2$ :

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \qquad \text{donc} \qquad x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

— $\left(y^2 + 4y\right)$ est le début du développement de $(y+2)^2$ :

$$(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4 \qquad \text{donc} \qquad y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$$

L'équation proposée devient donc :

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 & = & 0 \\ (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 20 & = & 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 & = & 25 \\ (x-1)^2 + (y-(-2))^2 & = & 5^2 \end{array}$$

Cette équation est donc l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\,(1\,;\,-2)$ et de rayon 5.

**Remarque :** Attention ! Toute équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ n'est pas une équation de cercle. Voir exercices pour des contre-exemples.

**Exercices :** 10, 11, 13, 14 page 247 et 63 page 257 [5] – 15, 16, 18 page 248 et 64 page 257 [6] – 66, 68, 69, 72 page 258 [7] – 70, 71 page 258 [8] – 101, 101 page 262 [9] – 103 page 262 [10] [TransMath]

5. Déterminer une équation de cercle.
6. Reconnaître une équation de cercle.
7. Droite tangente à un cercle.
8. Cercle passant par trois points.
9. Intersection de deux cercles.
10. Une famille de cercles.

### 2.2 Connaissant un diamètre

**Propriété :** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
$M$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

**Démonstration :**
Si $M$ est en $A$ ou en $B$, le résultat est évident.
Sinon, $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si le triangle $AMB$ est rectangle en $M$ (voir figure 2), c'est-à-dire $(MA)$ et $(MB)$ perpendiculaires.
On a donc bien $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

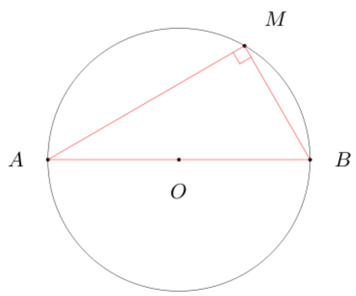


FIGURE 2 – Triangle inscriptible dans un demi-cercle

**Exemple :** Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A\ (-1\,;\,2)$ et $B\ (1\,;\,3)$.
$M\ (x\,;\,y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
Or, $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -1-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 1-x \\ 3-y \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} (-1-x)(1-x)+(2-y)(3-y) & = & 0 \\ -1+x-x+x^2+6-2y-3y+y^2 & = & 0 \\ x^2+y^2-5y+5 & = & 0 \end{array}$$

Une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2+y^2-5y+5=0$.
**Exercices :** 12 page 247 et 67 page 258 [11] [TransMath]

## 3 Quelques compléments de trigonométrie

### 3.1 Formules d'addition

**Théorème :** $a$ et $b$ sont deux réels.

$$\begin{array}{rcl} \cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) & = & \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{array}$$

**Démonstration :**
Soit $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.
Soient $A$ et $B$ deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = a\ [2\pi]$ et $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = b\ [2\pi]$ (voir figure 3).

11. Équation d'un cercle connaissant un diamètre.

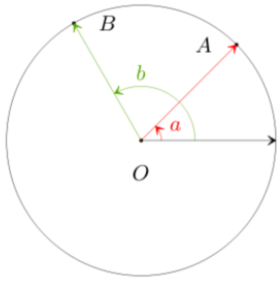


FIGURE 3 – Formules d'addition

$\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OB}\,;\vec{\imath}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right) = -\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right) = -b + a = a - b.$
De plus, par définition du cosinus et du sinus, $A\ (\cos a\,;\,\sin a)$ et $B\ (\cos b\,;\,\sin b)$.
On peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ de deux façons :

$$\text{Forme trigonométrique : } \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}\right) = 1 \times 1 \times \cos(b-a)$$
$$\text{A l'aide descoordonnées : } \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

On obtient donc : $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .
Pour trouver les autres formules, il suffit d'utiliser les angles associés :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) \\
&= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) \\
&= \cos a \cos b - \sin a \sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \\
&= \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin(a-(-b)) \\
&= \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) \\
&= \sin a \cos b + \cos a \sin b
\end{aligned}$$

**Exercices :** 20, 21, 23, 25 page 249 ; 87, 88 page 260 et 94 page 261 [12] [TransMath]

## 3.2 Formules de duplication

**Propriété 1 :** Soit $x$ un réel.

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

12. Formules d'addition.

**Démonstration :**
$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$
De plus, comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :
$\cos(2x) = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2\cos^2 x - 1$.
De même, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donc $\cos(2x) = \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.
$\sin(2x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x$.

**Propriété 2 :** Soit $x$ un réel.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

**Remarque :** Ces deux dernières formules se trouvent très rapidement à l'aide des relations $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

**Exercices :** 26, 27, 30 page 250 et 85, 86, 92 page 260 [13] – 36 page 252 [14] [TransMath]

# Références

[TransMath] transMATH $1^{\text{re}}$S, édition 2011 (Nathan)

2, 3, 4, 5, 6

13. Formules de duplication.
14. Pentagone régulier.