Équations de droites

Christophe ROSSIGNOL[*]

Année scolaire 2018/2019

Table des matières

Table des figures

1 Équations de droites

1.1 Rappels sur les fonctions affines

Définition : Soient m et p deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.

Le coefficient m est appelé coefficient directeur.

Le coefficient p est appelé ordonnée à l'origine.

Remarques : 1. Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine car $f(0) = p$.

2. — Si $m = 0$: $f(x) = p$, on obtient une fonction constante ;
   — Si $p = 0$: $f(x) = mx$, on obtient une fonction linéaire.

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une droite.
Cette droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Cas particuliers : — Si $f(x) = p$ (fonction constante), on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par l'ordonnée p ;
— Si $f(x) = mx$ (fonction linéaire), on obtient une droite passant par l'origine du repère.

1.2 Équations de droites

Propriété 1 : Dans un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, toute droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.
Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$.

Le coefficient m est appelé coefficient directeur.

Le coefficient p est appelé ordonnée à l'origine.

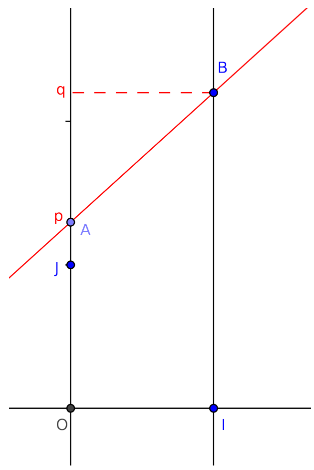

FIGURE 1 – Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Cas particuliers : — Une droite parallèle à l'axe des abscisses admet une équation de la forme $y = p$
— Une droite passant par l'origine du repère admet une équation de la forme $y = mx$.

Remarques : 1. Vérifier qu'un point est sur une droite revient donc à vérifier que ses coordonnées satisfont à l'équation de la droite.

2. Pour tracer une droite, il suffit d'avoir deux points. Il suffit donc de trouver les coordonnées de deux points de la droite pour la tracer. Très souvent, un de ces points sera le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Exemple : Soit (d) la droite d'équation $y = -2x + 3$.

— (d) passe par le point A $(0\,;\,3)$;
— si $x = 1$, $y = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1$ donc (d) passe par le point B $(1\,;\,1)$.

Cette droite est tracée sur la figure 2.

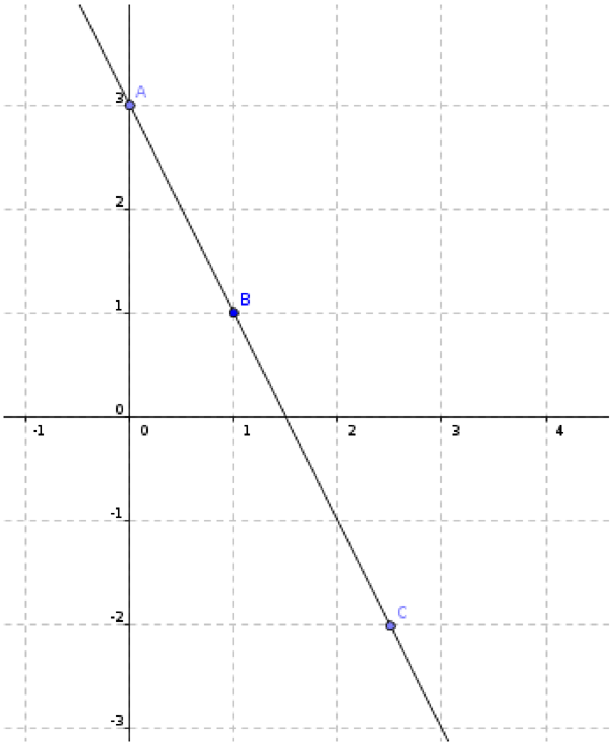

FIGURE 2 – Tracé de la droite d'équation $y = -2x + 3$

Vérifions maintenant que le point C $(2,5\,;\,-2)$ est bien sur la droite (d) :

$$-2 \times 2,5 + 3 = -5 + 3 = -2$$

Les coordonnées de C vérifient l'équation donc $C \in (d)$.

Propriété 2 : Dans un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, toute droite Δ parallèle à l'axe des ordonnées admet donc une équation de la forme $x = c$.

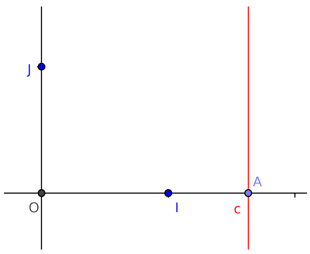

FIGURE 3 – Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Remarque : Attention ! Les droites parallèles à l'axe des ordonnées ont une équation de la forme $x =$ constante et les droites parallèles à l'axe des abscisses une équation de la forme $y =$ constante.

Exercices : 14, 15 page 192 [1] – 74 page 203 [2] – 87 page 205 [3][TransMath]

1. Tracer une droite d'équation donnée.
2. Autres types d'équations de droites.
3. Un peu de logique.

2 Coefficient directeur d'une droite

Propriété : Dans un repère, on considère les points $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ avec $x_A \neq x_B$ (voir figure 4).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abcisses}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

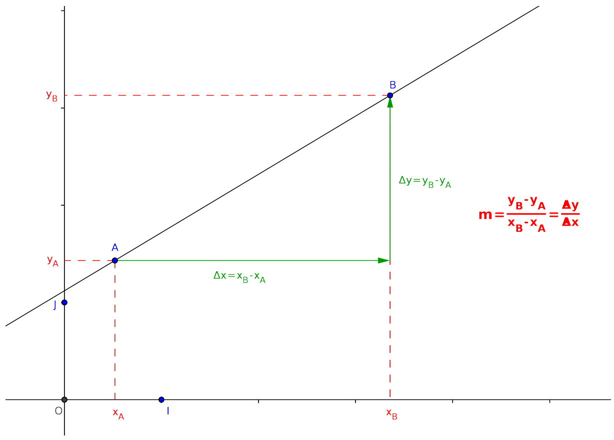

FIGURE 4 – Coefficient directeur d'une droite

Démonstration

Comme $x_A \neq x_B$, la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle admet donc une équation de la forme $y = mx + p$.

Comme les points A et B sont sur cette droite, on a : $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$.

$$y_B - y_A = (mx_B + p) - (mx_A + p) = mx_B + p - mx_A - p = mx_B - mx_A = m\,(x_B - x_A)$$

On obtient donc : $m\,(x_B - x_A) = y_B - y_A$. Comme $x_A \neq x_B$, on peut diviser cette expression par $x_B - x_A$ et on obtient :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple : Détermination l'équation de la droite (d) passant par $A\ (-2\,;\,1)$ et $B\ (6\,;\,5)$.
L'équation est de la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{6-(-2)} = \frac{4}{6+2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Par suite, l'équation est de la forme $y = \frac{1}{2}x + p$.
Pour déterminer l'ordonnée à l'origine p, il suffit de remarquer que la droite passe par $A\ (-2\,;\,1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times (-2) + p &= 1 \\ -1 + p &= 1 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

L'équation de la droite (d) est donc $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Exercices : 11, 12 page 191[4]

Remarque : On peut aussi déterminer graphiquement l'équation d'une d'une en utilisant les remarques suivantes :
— la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$;

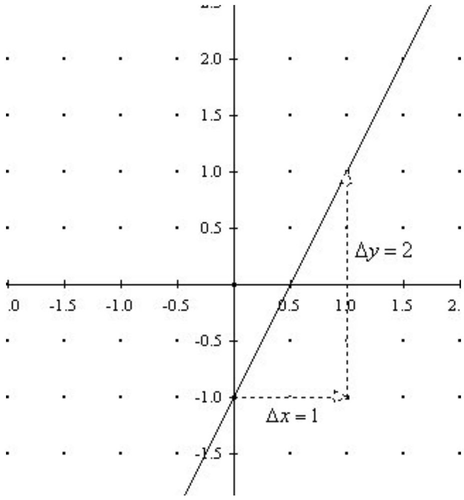

FIGURE 5 – Premier exemple de détermination graphique.

— le coefficient directeur est donné par la formule : $m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Exemples : 1. Voir figure 5.

L'équation de la droite est de la forme $y = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,-1)$ donc $p = -1$.
Partant de ce point, il faut avancer de 1 unité $(\Delta x = 1)$ et monter de 2 unités $(\Delta y = 2)$ pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$.
La droite admet donc comme équation : $y = 2x - 1$.

2. Voir figure 6.

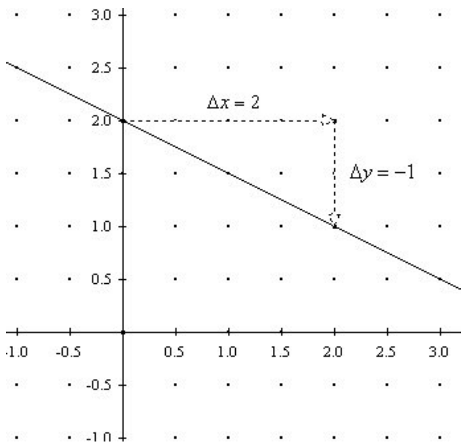

FIGURE 6 – Deuxième exemple de détermination graphique.

On pose $y = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ donc $p = 2$.
Partant de ce point, il faut avancer de 2 unités $(\Delta x = 2)$ et descendre de 1 unité $(\Delta y = -1)$ pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
La droite admet donc comme équation : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Exercices : 13 page 191 [5] – 60 page 201 et 16 page 192 [6] – 61, 62 page 201 [7] – 69, 70 page 202 [8] – 75 page 203 [9] [TransMath]

4. Déterminer l'équation d'une droite.
5. Déterminer graphiquement l'équation d'une droite.
6. Tracer une droite connaissant son coefficient directeur.
7. Utilisation du coefficient directeur.
8. Intersection avec les axes.
9. Étude d'une configuration.

3 Positions relatives de deux droites

Théorème 1 (admis) : Dans un repère, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = m'x + p$.
Dire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles équivaut à $m = m'$.

Théorème 2 : Dans un repère, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx+p$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = m'x + p$.
Dire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes équivaut à $m \neq m'$.

Remarque : Ce théorème est la *contraposée* du théorème précédent. Sa démonstration est donc immédiate.

Exercices : 17 page 193 ; 35 page 197 et 63, 67, 68 page 202 [10] – 18, 19 page 193 [11] – 24, 25, 27 page 195 [12] 66 page 202 et 82, 83, 86, 88 page 205 [13] [TransMath]

Théorème 3 : Dans un repère, on considère trois points A, B et C tels que l'abscisse de A soit différente de celle de B et de celle de C.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les coefficients directeurs de (AB) et (AC) sont égaux.

Démonstration

Comme l'abscisse de A est différente de celle de B et de C, les droites (AB) et (AC) ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées.

Donc, d'après le **Théorème 1**, dire que $(AB) \parallel (AC)$ équivaut à dire que les coefficients directeurs de (AB) et (AC) sont égaux.

De plus, comme les droites (AB) et (AC) ont un point commun (le point A), dire qu'elles sont parallèles revient à dire qu'elles sont confondues et donc que les points A, B et C sont alignés.

Exercices : 20, 21, 22 page 194 ; 34 page 197 et 79, 80 page 204 [14] – 71 page 202 [15] – 64, 65 page 202 [16] – 38, 39 page 218 et 41, 42 page 219 [17] [TransMath]

Références

[TransMath] Transmath Seconde, Nathan (édition 2010).

3, 5, 6

10. Parallélisme de deux droites données.
11. Équation d'une parallèle à une droite donnée.
12. Coordonnées du point d'intersection.
13. Étude d'une configuration.
14. Points alignés.
15. Algorithmique.
16. Droites concourantes.
17. Utilisation d'un repère pour démontrer.