Matrices

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2018/2019

Table des matières

Activité 1 (fp) : *Créer un tableau à double entrée*

1 Notion de matrice

1.1 Définition

Définition : Une matrice de format (ou dimension) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est noté a_{ij}.

Exemples :
1. Dans l'activité 1, la matrice représentant les achats pour le premier trimestre est :
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$
Elle est de format 2×3.
Le coefficient de la $1^{\text{ère}}$ ligne et de la $2^{\text{ème}}$ colonne est 20. On le note a_{12}. On a donc : $a_{12} = 20$.
De même, $a_{21} = 3$; $a_{13} = 30$ et $a_{23} = 8$.
2. Les notes d'un élève en mathématiques pour le premier trimestre peuvent être données sous la forme d'une matrice :
$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$
Elle est de format 1×3. On dit que B est un matrice ligne.
3. On considère la matrice suivante :
$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1,05 \\ 0,9 & 0,85 \end{pmatrix}$$
Elle est de format 2×2. On dit que Cest une matrice carrée d'ordre 2.
4. Si tous les coefficients d'une matrice D sont nuls, on dit que D est une matrice nulle.

Définition : La matrice transposée de A est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note A^T.
Si A est de format $n \times p$, alors A^T est de format $p \times n$.

Exemples : avec les notations des exemples précédents
1. Les achats du premier trimestre dans l'activité 1 peuvent aussi être représentés par :
$$\mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 20 & 5 \\ 30 & 8 \end{pmatrix}$$
Elle est de format 3×2.
2. Les notes de mathématiques de l'élève peuvent aussi être représentées par :
$$\mathrm{B}^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$
Elle est de format 3×1. On dit que B^T est une matrice colonne.

Remarque : La plupart des calculatrices (sauf la Casio Graph 25+) permettent de calculer sur des matrices. Voir page 107 [TransMath].

Définition : On dit que deux matrices sont égales si elles ont même format et si les coefficients situés à la même place sont égaux.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{14} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$

Exercices : 23, 28, 29 page 131 [1] [TransMath]

1. Coefficients d'une matrice.

1.2 Addition de matrices

Dans l'activité 1, pour calculer les quantités achetées aux deux premiers trimestres, on donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 10+15 & 20+15 & 30+15 \\ 3+5 & 5+5 & 8+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 45 \\ 8 & 10 & 18 \end{pmatrix}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}}_{1^{\text{er}}\text{trimestre}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}}_{2^{\text{ème}}\text{trimestre}}$$

Définition : On appelle somme de deux matrices A et B de même format la matrice obtenue en additionnant les coefficients situés aux mêmes emplacement.
Cette matrice est notée $A+B$.

Remarque : on retrouve les propriétés habituelles de l'addition, c'est-à-dire $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$ et $A+B = B+A$.

1.3 Multiplication d'une matrice par un réel

Dans l'activité 1, pour calculer les quantités achetées au dernier trimestre, on donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0,4\times 15 & 0,4\times 15 & 0,4\times 15 \\ 0,4\times 5 & 0,4\times 5 & 0,4\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

ce qui peut s'écrire :

$$0,4 \times \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}}_{2^{\text{ème}}\text{trimestre}}$$

Définition : On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k.
Cette matrice est notée $k\times A$ ou kA.

Remarques :

1. On positionnera *toujours* le réel *avant* la matrice : 3A et non pas $A\times 3$.
2. La matrice $(-1)\times A$ est notée $-A$ et est appelée matrice opposée de A. Ce qui permet de définir la soustraction de deux matrices : $A - B = A + (-B)$.
3. On retrouve les règles de calculs habituelles.
4. La calculatrice peut effectuer ce type de calcul sur des matrices.

Exercices : 24, 30, 31, 32 page 131 [2] ; 1 page 114 [3] [TransMath]

2 Multiplication de matrices

Activité 2 (fp) : *Étude d'une note à payer*

2. Premiers calculs sur des matrices.
3. Résolution d'équations simples.

2.1 Matrice ligne par matrice colonne

Définition : A étant une matrice ligne de format $1\times p$ et B un matrice colonne de format $p\times 1$, on appelle produit $A\times B$ le nombre obtenu en multipliant le premier élément de A par le premier élément de B, le deuxième élément de A par le deuxième élément de B, etc. puis en ajoutant tous ces produits :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1\times b_1 + a_2\times b_2 + \ldots + a_p\times b_p = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k$$

Remarque : Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible. Par exemple, le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'a aucun sens.

Exemple : Dans l'activité 2

— matrice ligne des quantités : $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

— matrice colonne des prix : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0,7 \end{pmatrix}$

Le prix total est : $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ 0,7 \end{pmatrix} = 8\times 2 + 6\times 1,5 + 10\times 0,7 = 32$ €

2.2 Cas général

Définition : A étant une matrice de format $n\times p$ et B une matrice de format $p\times m$, on appelle produit $A\times B$ la matrice de format $n\times m$ obtenu en multipliant chaque ligne de A par le chaque colonne de B. Plus précisément, le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne du produit $A\times B$ est obtenu en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.
Si on note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$, on a alors :

$$c_{ij} = a_{i1}\times b_{1j} + a_{i2}\times b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque : Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que le produit soit possible. Dans ce cas, le produit $A\times B$ a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Exemple : Dans l'activité 2

— matrice des quantités : $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

— matrice des prix : $\begin{pmatrix} 2 & 1,8 \\ 1,5 & 1,6 \\ 0,7 & 0,68 \end{pmatrix}$

Le vecteur-colonne des prix totaux est :

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1,8 \\ 1,5 & 1,6 \\ 0,7 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\times 2 + 6\times 1,5 + 10\times 0,7 & 8\times 1,8 + 6\times 1,6 + 10\times 0,68 \\ 10\times 2 + 8\times 1,5 + 12\times 0,7 & 10\times 1,8 + 8\times 1,6 + 12\times 0,68 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 32 & 30,8 \\ 40 & 38,96 \end{pmatrix}$$

Remarques : 1. Disposition pratique des calculs

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1,8 \\ 1,5 & 1,6 \\ 0,7 & 0,68 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 32 & 30,8 \\ 40 & 38,96 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Même si le calcul de $A \times B$ est possible, il n'y a aucune raison pour que le produit $B \times A$ le soit. Et même si c'est le cas, on aura généralement $AB \neq BA$. On dit que le produit de matrices n'est pas commutatif.
3. On retrouve les autres propriétés habituelles des produits :
   — Associativité : A(BC)=(AB)C=ABC et, si $k \in \mathbb{R}$, $(kA)\,B = A\,(kB) = k\,(AB)$
   — Distributivité : $A\,(B+C) = AB+AC$ et $(A+B)\,C = AC+BC$
4. La plupart des calculatrices (sauf la Casio Graph 25+) et les tableurs permettent de calculer sur des matrices. Voir page 111 [TransMath].

Exemple : Des résultats surprenants...

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 1\times1+1\times(-1)+1\times0 & 1\times2+1\times1+1\times(-3) \\ 2\times1+2\times(-1)+2\times0 & 1\times2+1\times1+1\times(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
   Un produit de matrice peut être nul même si aucune des deux matrices n'est nulle.
2. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ alors $M - N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = B$.
   On a donc $A\,(M\text{-}N) = AB = 0$ d'où AM-AN=0, c'est-à-dire AM=AN.
   On peut avoir AM=AN, même si $M \neq N$.

Exercices : 2 page 115 ; 25 page 131 et 35, 36 page 132 [4] – 3 page 115 et 37 page 132 [5] – 38 page 132 [6] – 61 page 137 [7] [TransMath]

3 Matrice carrée : puissances et inversion

Activité 3 (fp) : *A la découverte de la matrice identité*

3.1 Matrice Identité – Puissance d'une matrice

Définition : On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : La matrice identité est la matrice dont tous les coefficients de la diagonale sont égale à 1 et dont tous les autres coefficients sont égaux à zéro.

Propriété : — Pour toute matrice M carrée d'ordre n : $M \times I_n = I_n \times M = M$
— Pour toute matrice colonne X de format $n \times 1$: $I_n \times X = X$
— Pour toute matrice ligne Y de format $1 \times n$: $Y \times I_n = Y$

Remarque : La matrice identité joue donc le rôle du « 1 » dans la multiplication de nombres : $1 \times x = x \times 1 = x$.

4. Calcul de produits de matrices.
5. Utilisation.
6. Lien avec le produit scalaire.
7. QCM.

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n et p un entier naturel non nul.
On appelle puissance n-ième de la matrice A, la matrice carrée d'ordre n, notée A^n, et définie par :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Remarque : Par convention, on a $A^0 = I_n$.

Exercices : 4, 5, 6 page 124 et 39, 40 page 132 [8] – Problème 5 page 117 et 42, 43 page 133 [9][TransMath]

3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On dit que la matrice A est inversible si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n, notée A^{-1} telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

La matrice A^{-1} est alors appelée matrice inverse de A

Exemples : d'après les résultats de l'activité 3

— L'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

— La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Remarques : 1. Contrairement aux nombres, une matrice non nulle peut très bien ne pas être inversible !

2. La calculatrice permet de calculer, quand elle existe, l'inverse d'une matrice.

Propriété : (admise)
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
On appelle déterminant de la matrice A le nombre $ad - bc$.
— Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible ;
— Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice : 45, 47 page 133 ; 49 page 134 et 62 page 137 [10] — 65, 66, 69 page 138 [11] [TransMath]

Module : Problème 6 page 118 [12] et problème 8 page 121 [13] [TransMath]

3.3 Application à la résolution de systèmes

Un exemple pour comprendre : On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + 4y & = 8 \\ 2x - 3y & = 7 \end{cases} \quad (1)$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

On peut remarquer que $AX = \begin{pmatrix} x + 4y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$.

Le système 1 peut donc se noter : $AX = B$, où l'inconnue est la matrice colonne X.

8. Puissance de matrices.
9. Matrice associée à un graphe.
10. Inverse d'une matrice.
11. Des matrices particulières.
12. Une application en économie.
13. Traitement de l'image.

De plus, A est inversible car $1 \times (-3) - 2 \times 4 = -3 - 8 = -11 \neq 0$. On a :

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$$

Le système 1 devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{AX} &= \mathrm{B} \\ \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX} &= \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ \mathrm{I}_2\mathrm{X} &= \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \\ \mathrm{X} &= \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient donc : $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \times 8 + \frac{4}{11} \times 7 \\ \frac{2}{11} \times 8 - \frac{1}{11} \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{52}{11} \\ \frac{9}{11} \end{pmatrix}$.
La solution du système est donc le couple $\begin{pmatrix} \frac{52}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix}$.

Cas général : le système linéaire à n équations et n inconnues, notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$, où :
— A est la matrice carrée d'ordre n $\mathrm{A} = (a_{ij})$;
— X est la matrice colonne des inconnues $\mathrm{X} = (x_i)$;
— B est la matrice colonne $\mathrm{B} = (b_i)$.

Si A est inversible, en reprenant le calcul 2, on obtient : $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

Exercices : 7, 8, 9, 11 page 126 ; 50, 51, 53 page 134 et 70 page 139 [14] – 18 page 128 54 page 134 [15] – 64 page 137 [16] – 22 page 130 et 55, 56 page 135 [17] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S Spécialité, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 5, 6, 7

14. Résolution de système, applications.
15. Systèmes avec paramètres.
16. Algorithmique.
17. Chiffrement de Hill.