

Probabilités

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2018/2019

Table des matières

1	Loi de probabilité	2
1.1	Définitions	2
1.2	Modélisation d'expérience aléatoire	2
2	Probabilité d'un événement	2
2.1	Vocabulaire des événements	2
2.2	Probabilité d'un événement	3

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

Activité : Activités 1¹ (fp)

1 Loi de probabilité

1.1 Définitions

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience ayant plusieurs **issues** (ou **éventualités**) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
Ces éventualités sont notées $e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n$.
Leur ensemble est noté Ω et est appelé **univers**.
On a donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définitions : — Chaque éventualité e_i est affecté d'une **probabilité**, c'est-à-dire d'un nombre noté p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

- On appelle **loi de probabilité** la donnée des p_i vérifiant ces conditions.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité p est **équiprobable** (ou **équirépartie**).

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face ayant les mêmes chances d'apparaître, chaque éventualité a une probabilité de $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : De manière générale, si une expérience aléatoire est **équiprobable** et comporte n **issues différentes**, chacune des issues a une **probabilité de $\frac{1}{n}$** .

1.2 Modélisation d'expérience aléatoire

Activité : Activité 2² (fp)

Définition : **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Remarque : Pour une expérience donnée, les distributions de fréquence pour des échantillons de taille n se rapprochent de la loi de probabilités lorsque n devient grand (voir le chapitre « Simulation - Fluctuation d'échantillonnage »).

2 Probabilité d'un événement

Activité : Activité 3³ (fp)

2.1 Vocabulaire des événements

Définition : Un **événement** A est une **partie** de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).
 \emptyset est l'événement **impossible**.
 Ω est l'événement **certain**.

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

1. Choix de menus.
2. Avec deux dés.
3. Tirage de jetons.

— Des exemples d'événement :

- A : « Obtenir un nombre pair »
 B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
 B' : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 »
 C : « Obtenir 7 »
 D : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »

On a :

- $A = \{2; 4; 6\}$
 — $B = \{1; 2\}$
 — $B' = \{5; 6\}$
 — $C = \emptyset$ (événement **impossible**)
 — $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$ (événement **certain**)

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

- L'événement $A \cap B$ est l'événement « A et B ».
 — L'événement $A \cup B$ est l'événement « A ou B ».
 — L'événement \bar{A} est l'événement « contraire de A » ou « non A ».
 — Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.

- $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cap B = \{2\}$
 — $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$
 — \bar{A} est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
 $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$
 — Les événements B et B' sont incompatibles.

Exercices : 34, 35 page 159 et 52, 53 page 162⁴ [TransMath]

2.2 Probabilité d'un événement

Propriété : La **probabilité d'un événement** A est la **somme des probabilités des issues** qui le composent.

On la note $p(A)$.

On a donc $0 \leq p(A) \leq 1$.

Remarques : 1. $p(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω est un **événement certain**.

2. $p(\emptyset) = 0$. L'ensemble vide est un **événement impossible**.

3. Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété 1 : Si A est un événement :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 2.1

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercices : 1 page 149; 3 page 150; 38, 39 page 159 et 44 page 160⁵ – 49, 51 page 161⁶ – 4, 5, 7, 8 page 151 et 41, 45 page 160⁷ – 10, 11, 13, 16 page 153; 31 page 157; 66 page 164 et 69, 70 page 165⁸ – 32 page 157 et 61 page 163⁹ [TransMath]

4. Vocabulaire des probabilités.
5. Calculer la probabilité d'un événement.
6. Utiliser des fréquences.
7. Cas de l'équiprobabilité.
8. Modélisation à l'aide d'un arbre.
9. Cas d'un tirage simultané.

Propriété 2 : 1. Si A et B sont deux événements :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 2.1

— $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

— $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (on retrouve ce résultat directement en détaillant l'événement $A \cup B$.)

Exercices : 19, 20, 22 page 155 et 54 page 162¹⁰ – 17, 23, 25, 26 page 155 ; 55, 57 page 162 et 64, 68 page 164¹¹ [TransMath]

Références

[TransMath] Transmath Seconde, Nathan (édition 2010).

3, 4

10. Utilisation des formules.

11. Probabilité de l'intersection, de l'union.