Exercice 1 : Mouvements de population

On suppose que la population d'un pays reste constante et égale à 60 millions d'habitants.
Les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville.
Chaque année, 20 % des ruraux émigrent à la ville et 10 % des citadins émigrent en zone rurale.
Au 1er janvier 2012, il y a 20 millions de citadins et 40 millions de ruraux.
On cherche à connaître l'évolution du système au fur à mesure des années.

On note, pour tout entier naturel n, c_n et r_n les nombres respectivement de ruraux et de citadins l'année $2012+n$, exprimés en millions d'habitants.

1. Montrer que :

$$\begin{cases} c_{n+1} = 0,9c_n + 0,2r_n \\ r_{n+1} = 0,1c_n + 0,8r_n \end{cases}$$

2. (a) On note $\mathrm{H}_n = \begin{pmatrix} c_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer que le système précédent peut s'écrire sous la forme :

$$\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{AH}_n$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{H}_0$ et préciser la matrice H_0.

3. (a) A^{40}, A^{50} et A^{100} ont été calculées avec le logiciel Scilab.
D'après les résultats ci-dessous, émettre une conjecture sur A^n lorsque n tend vers $+\infty$

```
-->A=[0.9,0.2;0.1,0.8];A^40,A^
ans  =

   0.6666668788935    0.666666
   0.3333331211065    0.33333
ans  =

   0.6666666726616    0.666666
   0.3333333273385    0.333333
ans  =

   0.6666666666667    0.666666
   0.3333333333333    0.333333
```

   (b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,7^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,7^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,7^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,7^n \end{pmatrix}$$

   (c) Quelle limite L peut-on proposer pour la suite de matrices (A^n).

4. (a) À l'aide de la question 3.b , calculer H_n.

   (b) En déduire c_n et r_n en fonction de n. Déterminer leurs limites.

   (c) Quelle limite H peut-on proposer pour la suite de matrices (H_n) ?
vérifier que $\mathrm{AH} = \mathrm{H}$.

Exercice 2 : Des poussins et des benjamins

Dans un club sportif, chaque année, la moitié des benjamins part en minimes, l'autre moitié reste en benjamins.
La moitié des poussins part en benjamins, l'autre moitié reste en poussins.
Le club recrute aussi, chaque année, 15 nouveaux adhérents en catégorie poussins et 10 en catégorie benjamins.
À sa création, année notée 0, le club comptait 35 poussins et 60 benjamins.
On souhaite prévoir l'évolution des nombres de poussins et de benjamins en supposant que les mouvements sont les mêmes d'une année à l'autre.

On note b_n le nombre de benjamins de l'année n et p_n le nombre de poussins de l'année n (on acceptera des nombres non entiers).

1. *Modélisation à l'aide de matrices*
   (a) Montrer que la situation se traduit par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 15 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}p_n + 10 \end{cases}$$

   (b) On note $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout n entier naturel.
   Écrire le système précédent sous la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 et B une matrice colonne à déterminer.
2. *Calcul de A^n*
   (a) Déterminer la matrice T tel que $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{I}_2 + \mathrm{T}$ et calculer T^2.
   (b) Exprimer A^2 en fonction de I_2 et de T.
   (c) Montrer par récurrence que, pour $n \geq 1$:

$$\mathrm{A}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\mathrm{I}_2 + 2n\mathrm{T})$$

   En déduire les coefficients de la matrice A^n.
3. *Calcul de U_n à l'aide d'une suite auxiliaire*
   (a) Déterminer la matrice colonne $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$.
   (b) En déduire que la suite (V_n) définie par $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n - \mathrm{X}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$: $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n$.
   (c) On admet alors que $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$. En déduire que :

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n (\mathrm{U}_0 - \mathrm{X}) + \mathrm{X}$$

   (d) Déduire des résultats précédents l'expression de p_n et de b_n en fonction de n.
   (e) Que peut-on dire de l'évolution du nombre de poussins et de benjamins lorsque n devient grand ?