2 Marche aléatoire entre deux états

Définition : On considère un système qui peut se trouver dans deux états incompatibles. Il évolue par étapes successives, en changeant d'état de manière aléatoire, les probabilités de transition étant supposées constantes.
Une telle évolution est appelée marche aléatoire entre les deux états.

Exemple : Chaque matin, l'allumeur de lampadaire change l'état d'un lampadaire avec une probabilité de 0,8.
Le lampadaire a deux états possibles : allumé (noté A) ou éteint (noté E).
La probabilité de transition de A à E est 0,8, tout comme celle de E à A.
La probabilité de transition de A à A, tout comme celle de E à E, est de 0,2.
On a une marche aléatoire entre les états A et E.
On peut modéliser cette situation par un schéma appelé graphe probabiliste (voir figure 1). .

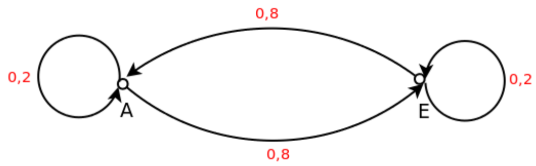

FIGURE 1 – Un exemple de graphe probabiliste

Définition : Soit une marche aléatoire entre deux états notés 1 et 2 avec p la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 et q la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1.
On associe à cette marche aléatoire :
- le graphe probabiliste qui schématise les échanges entre 1 et 2 :

- La matrice de transition T : c'est la matrice dont les coefficients t_{ij} sont égaux aux probabilités de transition d'un état i à un état j. On a donc :

$$T = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & p \\ q & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Remarque : Chaque coefficient de T est dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et la somme des coefficients sur chacune des lignes est égal à 1. On dit que cette matrice est stochastique.

1. Exemple : On reprend l'exemple précédent. La matrice de transition est :

$$T = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$$

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
- l'événement A_n : « Le système est dans l'état 1 à l'étape n » et $a_n = P(A_n)$ sa probabilité ;
- l'événement B_n : « Le système est dans l'état 2 à l'étape n » et $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

La matrice ligne $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est appelée répartition de probabilités à l'étape n.

Remarques :

1. On a $a_n + b_n = \dots$
2. On peut remarquer que :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \dots \qquad P_{A_n}(B_{n+1}) = \dots \qquad P_{B_n}(A_{n+1}) = \dots \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = \dots$$

Exemple : On reprend l'exemple précédent en supposant que le lampadaire est allumé au départ.
La répartition initiale des probabilités est $M_0 = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix}$.
On peut aussi remarquer que :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \dots \qquad P_{A_n}(E_{n+1}) = \dots \qquad P_{E_n}(A_{n+1}) = \dots \qquad P_{E_n}(E_{n+1}) = \dots$$

Propriété :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M_{n+1} = M_n T$ et $M_n = M_0 T^n$.

Démonstration (partielle) :

Exemple : On reprend l'exemple précédent.
Au bout d'une semaine, la répartition de probabilités est :

$$M_{\dots} = M_0 T^{\cdots} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Définition : On appelle répartition stable de probabilité toute répartition de probabilité M telle que $MT = M$.

Exercice : Avec les notations de l'exemple précédent, trouver la répartition stable de probabilités de deux façons différentes.

Propriété : (admise)
Si $(p\,;\,q) \neq (0\,;\,0)$ et si $(p\,;\,q) \neq (1\,;\,1)$ alors :
— Il existe une unique répartition stable de probabilité donnée par $M = \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$
— La suite (M_n) converge vers M, indépendamment de la répartition initiale M_0.

Remarque : Cette dernière propriété est hors-programme. Dans un exercice de BAC, tout ce qui concerne l'étude de limite sera guidé.

3 Marche aléatoire entre trois états

Le vocabulaire est exactement le même. On manipulera juste des matrices carrées d'ordre 3 et des matrices lignes à 3 colonnes.
On retrouve les mêmes résultats, y compris celle de la convergence vers la répartition stable.