Suites de matrices
Marches aléatoires

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2018/2019

Table des matières

1 Suites de matrices colonnes **2**

1.1 Suites de la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$ 2

1.2 Suites de matrices de la forme $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n + \mathrm{B}$ 2

1.3 Convergence d'une suite de matrices 3

2 Marche aléatoire entre deux états **3**

3 Marche aléatoire entre trois états **5**

Table des figures

1 Un exemple de graphe probabiliste 3

2 Graphe probabiliste – cas général 4

3 Un arbre pondéré 5

en préliminaire au cours :

— Activité 1 (fp) : *Mouvements de population*

— Activité 2 (fp) : *Des poussins et des benjamins*

1 Suites de matrices colonnes

1.1 Suites de la forme $U_{n+1} = AU_n$

Propriété : On considère A une matrice carrée d'ordre p et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une matrice colonne U_n à p lignes telle que $U_{n+1} = AU_n$.
On a alors :

$$U_n = A^n U_0$$

Remarques :

1. Ce résultat se montre très simplement par récurrence.
2. Pour déterminer les coefficients de U_n en fonction de n, il faut donc déterminer les coefficients de A^n. Il existe pour cela plusieurs méthodes :
   - On peut déterminer les coefficients de A^n directement par récurrence (voir activité 1) ;
   - Si A est une matrice diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_p \end{pmatrix}$, alors $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_p^n \end{pmatrix}$;
   - Si la matrice A peut se mettre sous la forme $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible, alors on peut montrer par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$;
   - Si la matrice A peut se mettre sous la forme $A = kI + T$ où I est la matrice identité et où la matrice T vérifie $T^2 = 0$, alors on peut montrer par récurrence que A^n s'écrit en fonction de I et de T (voir activité 2).

Exercice : 15 page 164[1] [TransMath]

1.2 Suites de matrices de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

On considère A une matrice carrée d'ordre p, la matrice colonne B à p lignes et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une matrice colonne U_n à p lignes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$.

Plan d'étude : (voir activité 2)

1. Déterminer la matrice colonne X telle que $X = AX + B$
2. On introduit la suite de matrices auxiliaire $V_n = U_n - X$ et on montre que $V_{n+1} = AV_n$

   Démonstration :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - X \\ &= (AU_n + B) - (AX + B) \\ &= AU_n + B - AX - B = AU_n - AX = A(U_n - X) = AV_n \end{aligned}$$

3. On a donc, grâce au 1.1 : $V_n = A^n V_0$, avec $V_0 = U_0 - X$
4. Puis, comme $V_n = U_n - X$:

$$U_n = V_n + X = A^n V_0 + X = A^n (U_0 - X) + X$$

1. Structure de population

Remarque : Pour déterminer la matrice colonne X, on peut soit résoudre un système d'équations, soit remarquer que si $\mathrm{I}-\mathrm{A}$ est inversible :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \mathrm{AX}+\mathrm{B} \\ \mathrm{X}-\mathrm{AX} &= \mathrm{B} \\ (\mathrm{I}-\mathrm{A})\,\mathrm{X} &= \mathrm{B} \\ \mathrm{X} &= (\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{B} \end{aligned}$$

Exercices : 1, 3 page 151 [2] – 2 page 151 [3] – 4 page 151 [4] – 28 page 168 [5] [TransMath]

1.3 Convergence d'une suite de matrices

Définition : On dit que la suite de matrice (U_n) converge vers la matrice L si tous les coefficients de U_n convergent vers les coefficients de L correspondants.

Exercices : 26, 27 page 168 [6] – 46 page 174 [7] [TransMath]

2 Marche aléatoire entre deux états

Activité : Problème 6 page 152 [8] [TransMath]

Définition : On considère un système qui peut se trouver dans deux états incompatibles. Il évolue par étapes successives, en changeant d'état de manière aléatoire, les probabilités de transition étant supposées constantes.
Une telle évolution est appelée marche aléatoire entre les deux états.

Exemple : Chaque matin, l'allumeur de lampadaire change l'état d'un lampadaire avec une probabilité de 0,8.
Le lampadaire a deux états possibles : allumé (noté A) ou éteint (noté E).
La probabilité de transition de A à E est 0,8, tout comme celle de E à A.
La probabilité de transition de A à A, tout comme celle de E à E, est de 0,2.
On a une marche aléatoire entre les états A et E.
On peut modéliser cette situation par un schéma appelé graphe probabiliste (voir figure 1). .

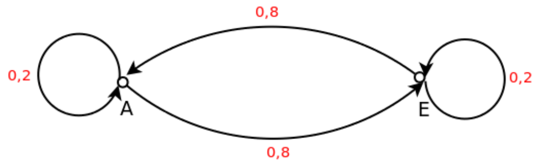

FIGURE 1 – Un exemple de graphe probabiliste

Définition : Soit une marche aléatoire entre deux états notés 1 et 2 avec p la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 et q la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1.
On associe à cette marche aléatoire :
— le graphe probabiliste qui schématise les échanges entre 1 et 2 (voir figure 2) :
— La matrice de transition T : c'est la matrice dont les coefficients t_{ij} sont égaux aux probabilités de transition d'un état i à un état j. On a donc :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

2. Suites de matrices
3. Un cas particulier
4. Avec des matrices lignes
5. Matrices et nombres complexes
6. Convergence d'une suite de matrices.
7. Cas où $\mathrm{I}-\mathrm{A}$ n'est pas inversible.
8. Voyelle ou consonne ?

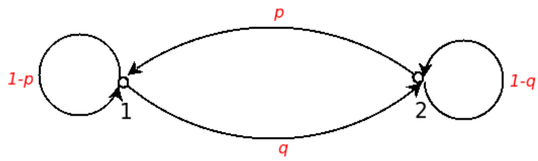

FIGURE 2 – Graphe probabiliste – cas général

Remarque : Chaque coefficient de T est dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et la somme des coefficients sur chacune des lignes est égal à 1. On dit que cette matrice est stochastique.

Exemple : On reprend l'exemple précédent. La matrice de transition est :

$$T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Définition : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
- l'événement A_n : « Le système est dans l'état 1 à l'étape n » et $a_n = P(A_n)$ sa probabilité ;
- l'événement B_n : « Le système est dans l'état 2 à l'étape n » et $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

La matrice ligne $\mathrm{M}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est appelée répartition de probabilités à l'étape n.

Remarques :

1. On a $a_n + b_n = 1$
2. On peut remarquer que :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p \qquad P_{A_n}(B_{n+1}) = p \qquad P_{B_n}(A_{n+1}) = q \qquad P_{B_n}(B_{n+1}) = 1-q$$

Exemple : On reprend l'exemple précédent en supposant que le lampadaire est allumé au départ.
La répartition initiale des probabilités est $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On peut aussi remarquer que :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,2 \qquad P_{A_n}(E_{n+1}) = 0,8 \qquad P_{E_n}(A_{n+1}) = 0,8 \qquad P_{E_n}(E_{n+1}) = 0,2$$

Propriété :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n\mathrm{T}$ et $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_0\mathrm{T}^n$.

Démonstration (partielle) :
On représente la situation par un arbre pondéré (voir figure 3).

On a alors : $\begin{cases} a_{n+1} = P(A_{n+1}) = (1-p)\,a_n + qb_n \\ b_{n+1} = P(B_{n+1}) = pa_n + (1-q)\,b_n \end{cases}$, c'est-à-dire $\mathrm{M}_{n+1} = \begin{pmatrix} (1-p)\,a_n + qb_n & pa_n + (1-q)\,b_n \end{pmatrix}$

De plus, $\mathrm{M}_n\mathrm{T} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)\,a_n + qb_n & pa_n + (1-q)\,b_n \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_n\mathrm{T}$.
Le deuxième résultat se montre aisément par récurrence sur n.

Exemple : On reprend l'exemple précédent.
Au bout d'une semaine, la répartition de probabilités est :

$$\mathrm{M}_7 = \mathrm{M}_0\mathrm{T}^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0,486 & 0,513 \end{pmatrix}$$

Définition : On appelle répartition stable de probabilité toute répartition de probabilité M telle que $\mathrm{MT} = \mathrm{M}$.

Exercice : Avec les notations de l'exemple précédent, trouver la répartition stable de probabilités $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. On remarquera pour cela que $x + y = 1$.

Propriété : (admise)
Si $(p\,;\,q) \neq (0\,;\,0)$ et si $(p\,;\,q) \neq (1\,;\,1)$ alors :
- Il existe une unique répartition stable de probabilité donnée par $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$
- La suite (M_n) converge vers M, indépendamment de la répartition initiale M_0.

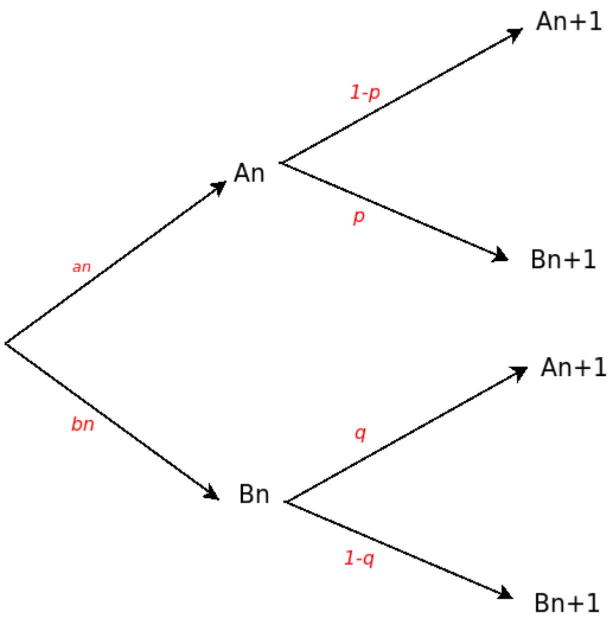

Figure 3 – Un arbre pondéré

Remarque : Cette dernière propriété est hors-programme. Dans un exercice de BAC, tout ce qui concerne l'étude de limite sera guidé.

Exercices : 7, 8 page 162 [9] – 30, 32, 33 page 169 et 41, 44 page 173 [10] – 45 page 173 [11] [TransMath]

3 Marche aléatoire entre trois états

Activité : Problème 7 page 153 [12] [TransMath]

Le vocabulaire est exactement le même. On manipulera juste des matrices carrées d'ordre 3 et des matrices lignes à 3 colonnes.
On retrouve les mêmes résultats, y compris celle de la convergence vers la répartition stable.

Exercices : 9, 10 page 162 ; 16 page 164 et 35, 36 page 170 [13] – 42 page 173 [14] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S Spécialité, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 5

9. Marches aléatoires entre deux états.
10. Type BAC
11. QCM
12. Bonus et malus en assurance automobile.
13. Marches aléatoires entre plusieurs états.
14. Type BAC