Suites : Rappels, récurrence

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Activités : Activités 1 [1] et 2 [2] page 22 [TransMath]

1 Généralités sur les suites

1.1 Modes de génération d'une suite

Cas 1 : A l'aide d'une formule explicite

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.
  On a : $u_0 = -0^2+0-2 = 2$; $u_1 = -1^2+1-2 = -2$; $u_2 = -2^2+2-2 = -4$; $u_5 = -5^2+5-2 = -22$; etc.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = (-1)^n$.
  On a : $v_0 = (-1)^0 = 1$; $v_1 = (-1)^1 = -1$; $v_2 = (-1)^2 = 1$ et, plus généralement :
  - tous les termes d'indice pair sont égaux à 1 (ce qui peut se traduire par $v_{2n} = 1$) ;
  - tous les termes d'indice impair sont égaux à -1 (ce qui peut se traduire par $v_{2n+1} = -1$

Remarque : La suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = -x^2 + x - 2$.

Cas 2 : Suites définies par récurrence

- Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{v_n+3}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

  On a :
  $v_1 = \frac{v_0+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $v_2 = \frac{v_1+3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$; $v_3 = \frac{v_2+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}+3}{2} = \frac{13}{4}$; etc.
- Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n + 2n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

  On a :
  $v_1 = -v_0+2\times 0 = -2+2\times 0 = -2$; $v_2 = -v_1+2\times 1 = -2+2\times 1 = 0$; $v_3 = -v_2+2\times 2 = 0+2\times 2 = 4$; etc.

Remarque : On a donc $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{2}$.

1.2 Suites arithmétiques

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montrera que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout entier n.
Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemple : Soit u la suite définie par $u_n = \frac{2}{3} - \frac{5}{6}n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6}(n+1) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}n\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6}n - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}n = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

La suite est donc arithmétique de raison $-\frac{5}{6}$ et de premier terme $u_0 = \frac{2}{3}$.

1. Prolifération bactérienne.
2. Exode rural

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_5 = 3$.
On a : $u_5 = u_3 + (5-3)\,r$ d'où $2r + 5 = 3$. On obtient $r = -1$.
De plus : $u_0 = u_3 - 3r = 5 - 3 \times (-1) = 8$.

Propriété 2 : Soit S_n la somme des entiers de 1 à n.

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

Alors, on a :

$$S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Propriété 3 : Somme de termes d'une suite arithmétique.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de (u_n). On a donc :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Alors, on a :

$$S_n = \frac{(n+1)\,(u_0 + u_n)}{2}$$

Remarque : Plus généralement, si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, on a :

$$S = \frac{(\text{nbre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

1.3 Suites géométriques

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé raison de la suite.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, montre que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. La constante trouvée est alors la raison q.

Exemples :

1. Soit u la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = \frac{3^{n+2} \times 3}{3^{n+2}} = 3$$

La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3 \times 4^{n+1}}{4^{n+1} \times 4 \times 3^n} = \frac{3}{4}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$.

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_5 = 100$ et $u_7 = 25$.
On a : $u_7 = u_5 \times q^2$ d'où $100q^2 = 25$ soit $q^2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
On a donc $q = \frac{1}{2}$ ou $q = -\frac{1}{2}$.
Comme $u_0 = u_5 \times q^{-5}$:

- Si $q = \frac{1}{2}$, $u_0 = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 100 \times 2^5 = 3200$.
- Si $q = -\frac{1}{2}$, $u_0 = 100 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = 100 \times (-2)^5 = -3200$.

Propriété 2 : La somme des puissances successives d'une nombre q, avec $q \neq 1$, s'exprime sous la forme :Alors, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriété 3 : Somme de termes d'une suite géométrique.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ et de premier terme u_0.
On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de (u_n). On a donc :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Alors, on a :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Plus généralement, si S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on a :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nbre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exercices : 1, 2 page 21 [3] [TransMath]

1.4 Sens de variation d'une suite

Définition :
- Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Remarque : On peut aussi définir une suite strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

Propriété 1 : Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$.
- Si la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse. Il suffit par exemple de considérer la suite $u_n = \sin(2\pi n)$.

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.
- Si pour tout n on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout n on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarques :

1. On déduit de la Propriété 1 que pour une suite arithmétique :
   - Si $r > 0$, la suite est strictement croissante

3. QCM, Vrai-Faux

— Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante

2. On déduit de la Propriété 3 que pour une suite géométrique de premier terme strictement positif :
   — Si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante
   — Si $q > 1$, la suite est strictement croissante
3. on admettra que si $q < 0$, la suite géométrique n'est pas monotone.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{(n+1)+2} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3(n+2) - 3(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} = -\frac{3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, comme n est un entier positif, $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$.
Par suite, pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+2}}$.
La suite (v_n) est à termes strictement positifs.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{(n+1)+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+2}}} \\ &= \frac{3^{n+1}}{4^{n+3}} \times \frac{4^{n+2}}{3^n} \\ &= \frac{3^{(n+1)-n}}{4^{(n+3)-(n+2)}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Par suite, pour tout n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ donc la suite (v_n) est décroissante.

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = \frac{120}{n+1}$.
On a $w_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{120}{x+1}$.
La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{120}{(x+1)^2}$. Son tableau de variations est donc :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Comme f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$. La suite (w_n) est donc décroissante.

Exercices : 3, 4 page 21 [4] ; exercices de la feuille « Variations de suites » [TransMath]

2 La démonstration par récurrence

2.1 Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (où n_0 est un entier naturel donné), on procède en deux étapes :

Initialisation : On vérifie que la proposition est vraie au rang initial, c'est-à-dire lorsque $n = n_0$.

Hérédité : On montre que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire que SI elle est vraie à un rang $n \geq n_0$, ALORS elle est aussi vraie au rang $n+1$.

On peut alors conclure que la proposition est vraie pour tout $n \geq n_0$.

4. Vrai-faux, QCM.

2.2 Exemples d'utilisation

2.2.1 Égalités – Inégalités

Exemple : Montrons par récurrence que, pour tout entier n non nul :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Initialisation : Il faut vérifier la proposition au rang 1.
$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$, ce qui vérifie la proposition au rang 1.

Hérédité : Soit n un entier non nul.
On suppose que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On veut montrer que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] \\ &= (n+1) \times \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\ &= (n+1) \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \end{aligned}$$

De plus, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 4n + 3n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$.
Par suite :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a donc montré que, pour tout entier n non nul :pour tout entier n non nul :

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercices : 1, 2, 4 page 29 et 52, 54, 58 et 62 page 42 [5] [TransMath]

2.2.2 Propriétés d'une suite

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On va en fait montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{5}$. On a bien $u_1 \geq u_0$.

5. Montrer une égalité ou une inégalité par récurrence.

Hérédité : On suppose que $u_{n+1} \geq u_n$. Il faut montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
Comme $u_{n+1} \geq u_n$, $2u_{n+1} \geq 2u_n$ puis $2u_{n+1} + 1 \geq 2u_n + 1$.
De plus, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\sqrt{2u_{n+1}+1} \geq \sqrt{2u_n+1}$.
Or, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+1}$ et $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}+1}$ d'où $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

On a donc montré que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

Remarque : Reprendre l'exemple précédent avec $u_0 = 3$ et montrer alors que la suite obtenue est décroissante. Ceci montre l'importance de l'étape d'initialisation...

Exercices : 5, 6, 7, 9 page 30 et 61, 63 page 42 [6] – 33 page 36 et 59, 60 page 42 [7] – 98 page 47 [8] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 4, 5, 6, 7

6. Propriétés de suites.
7. Conjecturer puis démontrer.
8. Type BAC.