Les nombres complexes

Christophe ROSSIGNOL[*]

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Activité : Activité 1 page 232 [1] [TransMath]

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition : Un nombre complexe est un nombre de la forme $a+ib$, où a et b sont deux nombres réels et i un nombre tel que $i^2=-1$.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{C}$.

Théorème (admis) : L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $a+ib$ avec a et b réels est unique.
Elle est appelée écriture algébrique du nombre complexe z.

Définition : Soit $z=a+ib$ un complexe, avec a, b réels.
- le réel a est la partie réelle du nombre complexe z. Elle est notée $\mathrm{Re}(z)$.
- le réel b est la partie imaginaire du nombre complexe z. Elle est notée $\mathrm{Im}(z)$.

Exemples :
1. $\mathrm{Re}\left(\sqrt{3}-i\right)=\sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}\left(\sqrt{3}-i\right)=-1$.
2. $\mathrm{Re}\left(-4i\right)=0$ et $\mathrm{Im}\left(-4i\right)=-4$.
3. Comme $i^2=-1$, $-2i^2+3=2+3=5$ donc $\mathrm{Re}\left(-2i^2+3\right)=5$ et $\mathrm{Im}\left(-2i^2+3\right)=0$.

Remarques : Soit $z\in\mathbb{C}$
- z est un réel si et seulement si $\mathrm{Im}\left(z\right)=0$.
  En particulier, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\right)=0$.
- $z=0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}\left(z\right)=0$.

Propriété : Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z\right)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}\left(z\right)=\mathrm{Im}(z')$.

1.2 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

On muni l'ensemble des nombres complexes d'une addition et d'une multiplication en appliquant les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1 (voir Activité page 1 page 232 [TransMath]). On obtient :

Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$: Soient z et z' de forme algébrique $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.

$$\begin{aligned} z+z' &= (a+a')+i\left(b+b'\right) \\ z.z' &= (aa'-bb')+i\left(ab'+a'b\right) \end{aligned}$$

Démonstration :

$$z+z'=a+ib+a'+ib'=(a+a')+i(b+b')$$

$$z.z'=(a+ib)\left(a'+ib'\right)=aa'+iab'+ia'b-bb'=(aa'-bb')+i\left(ab'+a'b\right)$$

Remarques :
1. En particulier, si k est un nombre réel, on a $k.z=(kx)+i\left(ky\right)$.
2. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ et on retrouve les mêmes identités remarquables.

Exemple : $(a+ib)\left(a-ib\right)=a^2-iab+iab-i^2b^2=a^2-\left(-1\right)b^2=a^2+b^2$
On obtient donc une nouvelle identité remarquable valable dans $\mathbb{C}$: $a^2+b^2=(a+ib)\left(a-ib\right)$.

Exercices : 1, 2, 3, 5, 7 page 241 et 51, 55 page 253 [2] [TransMath]

1. Des nombres réels aux nombres imaginaires.
2. Calculs dans $\mathbb{C}$.

1.3 Interprétation géométrique

Définition : Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormé direct et z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
— Le point $M\,(a\,;b)$ est appelé image de z. (voir figure 1)
— On dit que M a pour affixe z.
— La distance OM est appelée module de z. On note $|z| = OM$.

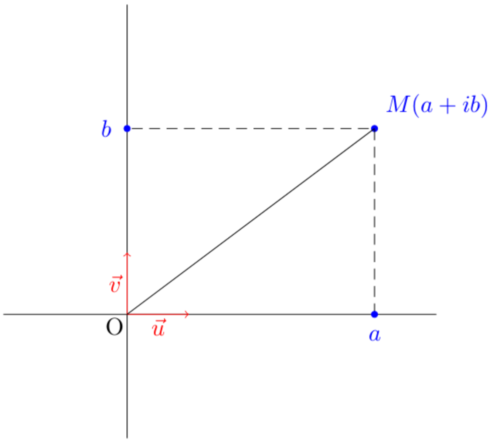

Figure 1 – Interprétation géométrique

Conséquences : 1. L'ensemble des nombres réels est représenté par l'axe des abscisses.
L'ensemble des imaginaires purs est représenté par l'axe des ordonnés.

2. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
4. Si z est un nombre réel (c'est-à-dire $z = a$), $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module correspond alors à la valeur absolue.

Exercices : 66, 67, 68 page 254 [3] – 69 page 254 [4][TransMath]

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition – Propriétés

Définition : Soit z le nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = a - ib$.

Remarques : 1. Le point M d'affixe z et le point M' d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (voir figure 2).

2. De la définition, on tire facilement que : $\overline{(\overline{z})} = z$.

Propriété : Soit z un nombre complexe. On a :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

Démonstration :

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathbf{Re}\,(z)$$

3. Affixes de points.
4. Premiers ensembles de points.

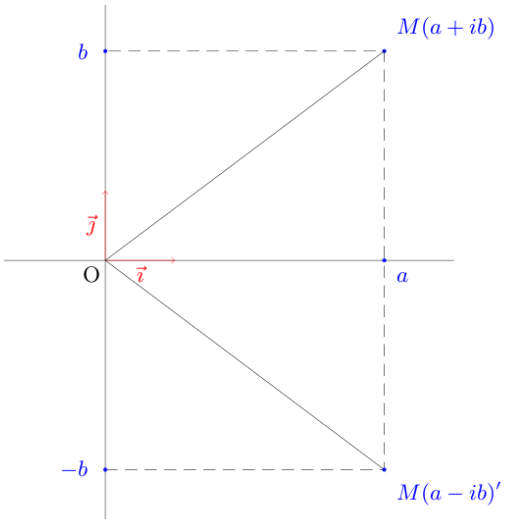

FIGURE 2 – Affixe du conjugué d'un nombre complexe

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = \frac{a+ib-a+ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \mathbf{Im}\,(z)$$

$$z\overline{z} = (a+ib)\,(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$$

Remarques : 1. En particulier, on a les résultats suivants :
- z est un nombre réel si et seulement $z = \overline{z}$.
- z est un imaginaire pur si et seulement $z + \overline{z} = 0$.

2. De la dernière égalité, on déduit que $z\overline{z}$ est toujours un nombre réel positif. Ce résultat sera utilisé, entre autres, pour trouver la forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.

Exemples : 1. $\frac{2}{3+i} = \frac{2(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i}{3^2+1^2} = \frac{6-2i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

2. $\frac{2-i}{3-2i} = \frac{(2-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i-3i+2}{3^2+(-2)^2} = \frac{8+i}{12} = \frac{4}{3} + \frac{1}{12}i$

Exercices : 9, 12 page 242 et 52, 53, 54 page 253 [5] – 14 page 242 ; 56, 57 page 253 [6] – 10 page 242 et 59 page 253 et 15, 16 page 243 [7] [TransMath]

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \text{ (avec} z' \neq 0)$$

Démonstration (partielle) :

Si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ alors $zz' = (aa'-bb') + i\,(ab'+a'b)$ donc $\overline{zz'} = (aa'-bb') - i\,(ab'+a'b)$.
De plus : $\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)\,(a'-ib') = (aa'-(-b)\times(-b')) + i\,(-ab'-a'b) = (aa'-bb') - i\,(ab'+a'b)$.
On en déduit que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

Remarque : On obtient facilement par récurrence que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ pour tout n entier naturel.

Exercices : 11 page 242 et 60 page 253 [8] – 114 page 261 [9] – 120, 21 page 263 [10] [TransMath]

5. Forme algébrique d'un quotient.
6. Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$.
7. Parties réelles et imaginaires.
8. Propriétés des conjugués.
9. Type BAC.
10. Ensembles de points.

3 Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$.
On considère l'équation : $az^2 + bz + c = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

En utilisant, comme dans le cours de 1ère S, la forme canonique, on montre que cette équation est équivalente à :

$$a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$.
Comme, de plus, $a \neq 0$, cette équation devient :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

— Si $\Delta > 0$:
On a alors $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$, on peut donc écrire : $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ d'où :

$$\begin{aligned} \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 &= 0 \\ \left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{array}{rcl} z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 & \text{ou} & z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ z = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} & & z = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & & z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a alors deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$:
On a alors :

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} z+\frac{b}{2a} &= 0 \\ z &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a alors une seule solution réelle (appelée solution double) :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$:
On a alors $\Delta = -(-\Delta)$ avec $-\Delta > 0$, on peut donc écrire : $\Delta = i^2 \times \left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$
On peut donc en déduire que $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$ et l'équation devient :

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est alors équivalente à :

$$\begin{array}{rclcrcl} z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 & & \text{ou} & & z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \\ z = -\frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} & & & & z = -\frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} & & & & z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{array}$$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a alors deux solutions complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

on peut de plus remarquer que ces deux solutions sont des nombres complexes conjugués.

Résumé : Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$)
$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de cette équation.
— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarques :

1. Les racines du trinôme du second degré à coefficients réels sont donc soit réelles, soit complexes conjugués.
2. Dans $\mathbb{C}$, un trinôme du second degré se factorise donc *toujours* sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exercices : 17 page 243 et 63 page 254 [11] – 18 page 243 et 64, 65 page 254 [12] – 19 page 243 ; 34 page 248 et 119 page 263 [13] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 4, 6

11. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$.
12. Avec un paramètre.
13. Équations de degré 3 ou 4 dans $\mathbb{C}$.