Information chiffrée

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

1 Différents types de pourcentages

Activité : Activité 1 (feuille polycopiée) [1]

1.1 Proportion, part en pourcentage

Définition : Soit E une population pris comme ensemble de référence.
Soit A une partie de l'ensemble E.
— La proportion des éléments de A par rapport à E est :

$$p = \frac{\text{nbre d'élèments de } A}{\text{nbre d'élèments de } E}$$

— La part en pourcentage de A dans l'ensemble E est le nombre a tel que :

$$\frac{a}{100} = \frac{\text{nbre d'élèments de } A}{\text{nbre d'élèments de } E}$$

Exemples : 1. En janvier 2012, il y avait 5,2 millions d'utilisateurs de Twitter en France et 383 millions dans le monde.
La proportion des utilisateurs français est :

$$p = \frac{5,2}{383} \simeq 0,014$$

Ce qui correspond à une part en pourcentage : $t = p \times 100 \simeq 1,4$.
Les utilisateurs français représentaient donc 1,4 % des utilisateurs de Twitter en janvier 2012.

2. 85 % des utilisateurs de Twitter étaient satisfait de ce service.
Il y avait donc alors une proportion de 0,85 de satisfaits, donc $0,85 \times 383 \simeq 326$ millions d'utilisateurs satisfaits.

Remarques : 1. Pour calculer une part en pourcentage, il suffit donc de multiplier une proportion par 100.

2. Cela revient à considérer que l'ensemble de référence a un effectif de 100 et de faire un calcul de proportionnalité.

3. Avant de calculer ou d'utiliser un pourcentage, il est donc *essentiel* de connaître l'ensemble de référence.

Exercices : 1, 2, 3 (feuille polycopiée) [2]

1.2 Pourcentage d'évolution

Définition : On considère une quantité passant de la valeur initiale V_I à la valeur finale V_F.
— Le taux d'évolution est la quantité (sans unité) :

$$t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

— Le pourcentage d'évolution est le taux d'évolution exprimé en pourcentage :
  — lors d'une augmentation de a %, on a : $t = \frac{a}{100}$
  — lors d'une baisse de a %, on a : $t = -\frac{a}{100}$
— Le coefficient multiplicateur est le nombre (sans unité) par lequel il faut multiplier V_1 pour obtenir V_2. Il est noté CM. On a donc :

$$V_F = CM \times V_I \qquad \text{soit} \qquad CM = \frac{V_F}{V_I}$$

Remarque : — Pour une augmentation ($V_F > V_I$) : $CM > 1$ et $t > 0$.

1. Twitter en France et dans le monde.
2. Proportion, part en pourcentage.

— Pour une diminution ($V_F < V_I$) : $0 < CM < 1$ et $t < 0$.

Exemple : En juillet 2012, il y avait 7,3 millions d'utilisateurs de Twitter en France et 517 millions dans le monde.
Le taux d'évolution entre Janvier et Juillet 2012 est :
— dans le Monde : $\frac{517-383}{383} \simeq 0,350$, ce qui correspond à une augmentation de 35 %.
— en France : $\frac{7,3-5,2}{5,2} \simeq 0,404$, ce qui correspond à une augmentation de 40,4 %.

Propriété : Lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution
On a :

$$CM = 1 + t$$

Exemples : — Une augmentation de 50 % donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{50}{100} = 1,5$.
— Une augmentation de 5 % donne un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
— Une diminution de 75 % donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{75}{100} = 0,25$.
— Une diminution de 5 % donne un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

Remarques : 1. On peut avoir des augmentations de plus de 100 % mais pas de diminutions de plus de 100 % .
2. La propriété précédente permet aussi de retrouver le pourcentage d'évolution *à partir* du coefficient multiplicateur :
— $CM = 1,7$ correspond à une augmentation de 70 % ;
— $CM = 1,07$ correspond à une augmentation de 7 % ;
— $CM = 1,856$ correspond à une augmentation de 85,6 % ;
— $CM = 3$ correspond à une augmentation de 200 % ;
— $CM = 0,6$ correspond à une diminution de 40 % ;
— $CM = 0,82$ correspond à une diminution de 18 % .
3. Il peut être plus simple d'utiliser le coefficient multiplicateur pour déterminer une valeur après augmentation (ou diminution) en pourcentage.

Exemples : 1. Le Brésil comptait 33,3 millions d'utilisateurs de Twitter en janvier 2012. Ce nombre a augmenté de 23 % au premier semestre 2012.
Le coefficient multiplicateur est : $CM = 1 + 0,23 = 1,23$.
Le nombre d'utilisateurs de Twitter au Brésil en juillet 2012 était alors de $1,23 \times 33,3 \simeq 41$ millions.
2. Le nombres de comptes Twitter en Arabie Saoudite a progressé de 93 % durant ces six mois, atteignant 2,9 millions de comptes en juillet 2012.
Le coefficient multiplicateur est : $CM = 1 + 0,93 = 1,93$.
Le nombre d'utilisateurs de Twitter en janvier 2012 en Arabie Saoudite était alors de $\frac{2,9}{1;,93} \simeq 1,5$ millions.

Exercices : Exercices 4 (feuille polycopiée)[3] – exercice 5(feuille polycopiée)[4] – exercice 6 (feuille polycopiée)[5]

2 Indices

Activité : Activité 2 (feuille polycopiée)[6]

Définition : Pour étudier les variations d'une ou plusieurs quantités dans le temps, on fixe une date de référence à laquelle on attribue l'indice 100.
Les indices des autres dates sont donnés par un calcul de proportionnalité :

$$\textbf{Indice à la date } k = \frac{\textbf{Valeur à la date } k}{\textbf{Valeur à la date référence}} \times 100$$

Remarque : Les indices permettent de calculer rapidement des pourcentages d'évolution *par rapport à la date de référence* et de comparer des évolutions sur des données qui n'ont pas le même ordre de grandeur.

3. Taux d'évolution.
4. Avec un tableur.
5. Avec un algorithme.
6. Le SMIC horaire brut en France.

Propriété : Les taux d'évolution pour des grandeurs sont égaux aux taux d'évolution pour les indices correspondants.

Exercices : 1, 2, 4 page 20 [7] – 6, 7, 10 page 20 [8] – 13 page 21 et 39 page 26 [9] – 38 page 26 [10] [Intervalle]

3 Taux d'évolution moyen

3.1 Évolutions successives

Propriété : Lors d'évolutions successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient. On a :

$$V_0 \xrightarrow{CM_1} V_1 \xrightarrow{CM_2} V_2 \qquad \text{alors} \qquad CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2$$

Le taux global d'évolution correspondant à deux évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1 et t_2 est donc le réel T tel que :

$$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)$$

Exemple : Une quantité augmente d'abord de 10 % puis baisse de 5 %.
On a : $CM_1 = 1 + 0,10 = 1,1$ et $CM_2 = 1 - 0,05 = 0,95$.
Le coefficient multiplicateur global est donc $CM_{\text{global}} = 1,1 \times 0,95 = 1,045$.
Ce qui correspond à un taux d'évolution global de 0,045, soit une augmentation globale de 4,5 %.

Propriété : Plus généralement, on a le résultat suivant :
Le taux global d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le réel T tel que :

$$1 + T = (1 + t_1)(1 + t_2)\dots(1 + t_n)$$

Exercices : 18 page 21 ; 19 page 22 et 41 page 26 [11] [Intervalle]

3.2 Racine n-ième d'un réel positif

Activité : Activité page 14 [12] [Intervalle]

Propriété : (admise)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel a positif, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = a$.
Ce nombre x est appelé racine n-ième de a et est noté $x = a^{\frac{1}{n}}$ ou $x = \sqrt[n]{a}$.

Remarque : 1. On a $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.
2. Pour déterminer ce nombre, on utilisera la calculatrice.

Exercices : 14, 16, 17 page 21 [13] [Intervalle]

3.3 Taux d'évolution moyen

Propriété : Le taux d'évolution moyen t correspondant à deux évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1 et t_2 est le taux qui, répété 2 fois, fournirait le même taux global.
On a donc : $(1 + t)^2 = (1 + t_1)(1 + t_2)$ soit $1 + t = \sqrt{(1 + t_1)(1 + t_2)}$

7. Calcul d'indices.
8. Tableaux à compléter.
9. Indices et taux de variation.
10. QCM.
11. Évolutions successives.
12. Solutions positives de $x^n = 4$.
13. Utilisation de la calculatrice.

Exemple : En 2010, une population a augmenté de 5 %, puis de 20 % en 2011.
Le coefficient multiplicateur global est $CM_{global} = 1,05 \times 1,2 = 1,26$ soit une augmentation de 26 % sur 2 ans.
Le taux dévolution t moyen sur 2 ans vérifie :

$$(1+t)^2 = 1,26$$

on a donc : $1 + t = \sqrt{1,26} \simeq 1,123$ donc $t \simeq 0,123$.
Cela correspond donc a une augmentation moyenne de 12,3 % par an.

Remarque : Il s'agit d'une « moyenne », mais pas au sens habituel. On appelle cette moyenne moyenne géométrique (la moyenne « habituelle » est appelée moyenne arithmétique).

Propriété : Le taux d'évolution moyen t correspondant à n évolutions successives de taux d'évolution respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le taux qui, répété n fois, fournirait le même taux global.
On a donc : $(1+t)^n = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$ soit $1 + t = \sqrt[n]{(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)} = (1+T)$

Exemple : En 2012, la même population a augmenté de 30 %
Le coefficient multiplicateur global est $CM_{global} = 1,05 \times 1,2 \times 1,3 = 1,638$ soit une augmentation de 63,8 % sur 3 ans.
Le taux dévolution t' moyen sur 3 ans vérifie :

$$(1+t')^3 = 1,638$$

on a donc : $1 + t' = (1,638)^{\frac{1}{3}}$ donc $t' \simeq 0,179$.
Cela correspond donc a une augmentation moyenne de 17,9 % par an.

Exercices : 20, 21 page 22[14] – 22, 23, 25, 28, 29, 30 page 22[15] – 36 page 25[16] – 37 page 25[17] – 44 page 27[18] – 45, 48 page 27[19] [Intervalle]

Exercices de synthèse : 49, 50 page 28[20] [Intervalle]

Références

[Intervalle] Collection Intervalle, Mathématiques, programme 2013, Term STMG, Nathan, 2013.

4, 5

14. À partir du taux moyen.
15. Calcul de taux moyen.
16. Ne pas confondre moyenne et taux d'évolution moyen.
17. Utilisation du tableur.
18. QCM.
19. Type BAC.
20. type BAC.