Limites de suites – Applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/`

1 Limite d'une suite

Activités : Activité 1[1] et 2[2] page 22 [TransMath]

1.1 Limite finie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet comme limite le réel l si tout intervalle contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (voir figure 2).
On dit alors que (u_n) converge vers l et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

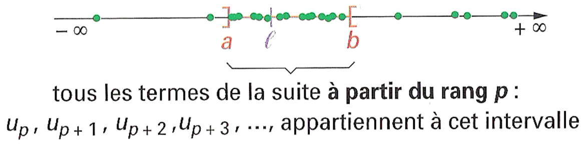

FIGURE 1 – Suite de limite finie l

Remarques : 1. Si elle existe, la limite l d'une suite est unique.

2. Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.
3. Les suites de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$ ont pour limite zéro.

Un exemple de suite divergente : Soit $u_n = (-1)^n$
-1 et 1 sont les deux seules valeurs possibles pour la suite. La limite éventuelle de la suite ne pourrait donc être que -1 ou 1.
Or, aucun des intervalles $]0\,; 2[$ et $]-2\,; 0[$ ne contiennent tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (les termes d'indice pair sont dans $]0\,; 2[$ et ceux d'indice impair dans $]-2\,; 0[$.
Cette suite est donc divergente (en fait, elle n'a pas de limite).

Exercice : 39 page 39[3] – 101 page 48[4] [TransMath]

1.2 Limite infinie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet comme limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]a\,; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (voir figure 2).
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

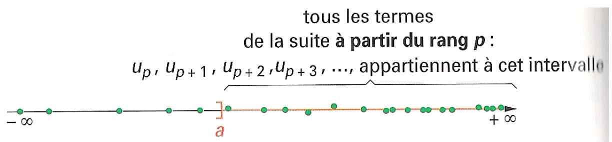

FIGURE 2 – Suite de limite $+\infty$

Remarques : 1. Cette suite est divergente.

2. Les suites de terme général $\sqrt{n}$; n ; n^2 et n^3 admettent comme limite $+\infty$.
3. On définit de manière analogue une suite de limite $-\infty$:

1. Prolifération bactérienne.
2. Exode rural.
3. Au voisinage de la limite.
4. Unicité de la limite d'une suite convergente.

Définition : On dit que la suite (u_n) admet comme limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque : Les suites de terme général $-\sqrt{n}\,;\ -n\,;\ -n^2$ et $-n^3$ admettent comme limite $-\infty$.

Exercice : 38 page 38 [5] [TransMath]

2 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, l et l' désignent deux nombres réels.

2.1 Limite d'une somme

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

TABLE 1 – Limite d'une somme

Remarque : « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail les suites pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}+2\right)=?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}2=2\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}+2\right)=+\infty$$

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-n\right)=?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}(-n)=-\infty\end{array}\right\}\text{ On a une forme indéterminée}$$

Cette F.I. sera levée à la sous-section 2.2.

2.2 Limite d'un produit

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty}\left(-3n^2\right)=?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}-3=-3\\ \lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{n\to+\infty}\left(-3n^2\right)=-\infty$$

5. Dépasser un seuil.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
		Il s'agit de la règle des signes								

TABLE 2 – Limite d'un produit

2. $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - n\right) = ?$
   On a déjà vu à la sous-section 2.1 que cette limite présente une forme indéterminée. Or, si $n \neq 0$, $n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et :

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - n\right) = +\infty$$

   On a levé l'indétermination.

Remarque : Pour lever une indétermination de la forme « $\infty - \infty$ », il suffit souvent de mettre en facteur le terme de plus haut degré.

Exercices : 45, 46, 49, 50 page 42 [6] – 17 page 32 [7] [TransMath]

2.3 Limite d'un quotient

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

$\lim_{x\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim_{x\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.
			règles des signes		il faut prendre en compte le signe de v_n		

TABLE 3 – Limite d'un quotient

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{2n^2-1} = ?$

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{n\to+\infty} -5 = -5 \\ \lim_{n\to+\infty} 2n^2 - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{2n^2-1} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-2}{3n-1} = ?$

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{n\to+\infty} n - 2 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} 3n - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{On a une forme indéterminée}$$

6. Limites « simples ».
7. Lever une indétermination.

On va mettre en facteur les termes de plus haut degré :

$$\frac{n-2}{3n-1}=\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1-\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}1-\frac{2}{n}=1\\ \lim_{n\to+\infty}3-\frac{1}{n}=3\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{3n-1}=\frac{1}{3}$$

Remarque : Pour lever une indétermination de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », il suffit souvent de mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis réduire la fraction obtenue.

Exercices : 47, 48, 51 page 42 [8] – 19, 20 page 32 [9] – 65 (sauf (c)), 66, 67, 72, 73, 74 page 43 [10] – 35 page 36 [11] [TransMath]

2.4 Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Remarque : Pour utiliser le théorème suivant, on utilisera la notion de limite de fonctions de manière intuitive, comme en classe de 1S. Cette notion sera précisée dans le chapitre « Limites de fonctions - Asymptotes ».

Théorème : (admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I.
b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=b$ et $\lim_{x\longrightarrow b}f(x)=c$ alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty}f(u_n)=c$.

Exemple :

1. Étudier la limite en $+\infty$ de $u_n=\sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.
   On montre, à l'aide de la méthode du 2.3 que $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{n+1}=3$.
   Comme $\lim_{X\longrightarrow 3}\sqrt{X}=\sqrt{3}$ donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=\sqrt{3}$.
2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+1}=+\infty\\ \lim_{n\to+\infty}n=+\infty\end{array}\right\}\text{ On a une forme indéterminée}$$

De plus :

$$\sqrt{n^2+1}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)=+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$

Remarque : Pour les suites s'exprimant à l'aide de racines carrées, on lève souvent les indéterminations en utilisant la quantité conjuguée.

Exercices : 21, 22, 23 page 33 – 68, 69 page 71 – 69, 70 page 43 [12] [TransMath]

3 Limites par comparaison

3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites et a n_0 un entier naturel.

1. Si, pour $n\geq n_0$, on a $u_n\geq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
2. Si, pour $n\geq n_0$, on a $u_n\leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty}v_n=-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

8. Limites « simples ».
9. Formes indéterminées.
10. Calculs de limites.
11. Un encadrement utile.
12. Limites de composées.

Démonstration (exigible) :

1. Soit a un nombre réel.

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier p tel que l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contienne tous les termes de (v_n) à partir de l'indice p.
On note N le plus grand des nombres entiers n_0 et p.
pour $n \geq N$, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes v_n et, de plus, $u_n \geq v_n$.
Par suite, pour $n \geq N$, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes u_n.
Cette démonstration étant valable pour tout nombre réel a, on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit a un nombre réel.

Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, il existe un entier p tel que l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contienne tous les termes de (v_n) à partir de l'indice p.
On note N le plus grand des nombres entiers n_0 et p.
pour $n \geq N$, l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes v_n et, de plus, $u_n \leq v_n$.
Par suite, pour $n \geq N$, l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes u_n.
Cette démonstration étant valable pour tout nombre réel a, on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Soit $u_n = \sqrt{n^2+1}$
Pour tout entier n, $n^2+1 \geq n^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, elle conserve l'ordre donc $\sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{n^2}$.
Comme n est un entier positif, $\sqrt{n^2} = n$.
On a donc $\sqrt{n^2+1} \geq n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2 : Théorème dit « des gendarmes » (admis)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ; n_0 un entier naturel et l un réel.
Si, pour $n \geq n_0$, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.
Comme $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $\sqrt{n} > 0$, on a :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, la suite (u_n) converge vers zéro.

Exercices : 11, 12, 13, 14, 15 page 31 [13] – 16 page 31 et 85 page 44 [14] – 21 page 33 et 81 page 44 [15] – 93 page 47 [16] [TransMath]

3.2 Application : limite des suites géométriques

Rappel : Soit q un réel différent de zéro et de 1.
- Si $q \leq -1$, la suite de terme général (q^n) n'a pas de limite (elle est donc divergente).
- Si $-1 < q < 1$, la suite de terme général (q^n) a pour limite zéro.
- Si $q > 1$, la suite de terme général (q^n) admet comme limite $+\infty$ (elle est donc divergente).

Démonstration partielle (exigible) :
Les 2 premiers résultats sont admis. On ne démontrera que le troisième.
Comme $q > 1$, on peu noter $q = 1 + a$, avec $a > 0$.
Montrons par récurrence que $q^n \geq 1 + na$.
Initialisation : $q^0 = 1 = 1 + 0 \times a$ donc la propriété est vérifiée au rang zéro.
On peut aussi remarquer que $q^1 = q = 1 + a = 1 + 1 \times a$ et $q^2 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \geq 1 + 2a$...

13. Limites par comparaison.
14. Cas d'une somme.
15. Avec des racines carrées.
16. Restitution organisée des connaissances.

Hérédité : On suppose que $q^n \geq 1 + na$ et on veut monter que $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a$.
Comme $q^{n+1} = q^n \times q$ et $q > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} q^n & \geq & 1 + na \\ q^n \times q & \geq & (1+na) \times q \\ q^{n+1} & \geq & (1+na)(1+a) \\ q^{n+1} & \geq & 1 + na + a + na^2 \\ q^{n+1} & \geq & 1 + (n+1)\,a + na^2 \end{array}$$

Comme $na^2 \geq 0$, on a donc $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a$.
On a donc montré que, pour tout n, $q^n \geq 1 + na$.
De plus, comme $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} (1+na) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

4 Convergence des suites monotones

4.1 Les théorèmes

Définition : On dit que la suite (u_n) est majorée par M si, pour tout n, $u_n \leq M$.
On dit que la suite (u_n) est minorée par m si, pour tout n, $u_n \geq m$.
On dit que la suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque : 1. Si la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,; +\infty[$ pour montrer que (u_n) est majorée, minorée ou bornée.
2. Si la suite (u_n) est définie par récurrence, on utilisera généralement le raisonnement par récurrence pour montrer que la suite (u_n) est bornée (respectivement majorée ou minorée).

Propriété 1 : — Si (u_n) est une suite croissante non majorée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
— Si (u_n) est une suite décroissante non minorée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration (partielle) :
Si la suite (u_n) est non majorée, alors, si $a > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > a$.
De plus, comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq n_0$, $u_n > a$.
Par suite, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]a\,; +\infty[$. La suite (u_n) admet donc comme limite $+\infty$.

Propriété 2 (admise) : — Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge.
— Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge.

Remarque : Cette propriété prouve juste que la suite est convergente. Elle ne donne pas la limite. Pour déterminer cette limite, on faudra utiliser une autre méthode.

Exercices : 77 page 43 et 102 page 48 [17] [TransMath]

4.2 Une application de la continuité aux limites de suites

Propriété : Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) a une limite finie l et si f est continue en l alors :

$$f(l) = l$$

Démonstration :
Comme f est continue en l, $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$.
Comme, de plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, par composition, on a : $\lim_{n\to=+\infty} f(u_n) = f(l)$.
De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $l = f(l)$.

Remarque : Cette propriété permet de déterminer la limite d'une suite lorsque l'on sait au préalable qu'elle est convergente ; par exemple, dans le cas des suites monotones bornées.

Exercices : 74 page 127 et 75 page 128 [18][TransMath]

17. Convergence de suites monotones.
18. Étude de suites.

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 4, 5, 6, 7