Probabilités conditionnelles

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

En préliminaire au cours :

Exercices : 1, 2, 3, 4 page 349[1] [TransMath]

Activité : Activité 1 page 350[2] [TransMath]

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Un exemple pour comprendre

Exemple : Pour fabriquer un objet, un artisan achète des pièces auprès de trois fournisseurs $A1$, $A2$ et $A3$.
25 % des pièces proviennent de $A1$, 40 % de $A2$ et le reste de $A3$.
5 % des pièces de $A1$ ont un défaut, 10 % de celles de $A2$ ont un défaut, de me que 0, 1 % de celle de $A3$.
On prend au hasard une de ces pièces.
Calculer la probabilité de l'événement D : « la pièce présente un défaut ».

L'univers Ω est l'ensemble des pièces fabriquées par $A1$, $A2$ et $A3$. On suppose qu'il comporte n éléments.
On note A_i l'événement : « la pièce provient du fournisseur Ai ».
On modélise la situation par un arbre (voir figure 1).

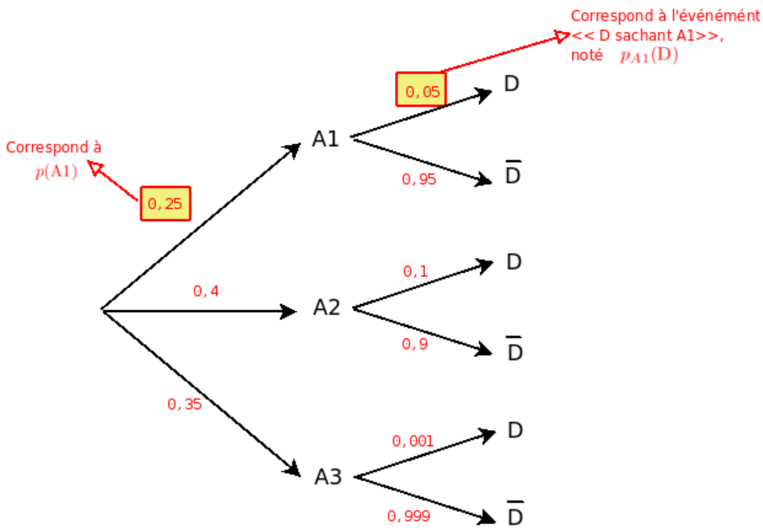

FIGURE 1 – Probabilités conditionnelles : utilisation d'un arbre

L'événement représenté par le chemin $-A_1 - D$ est l'événement « la pièce provient du fournisseur $A1$ et présente un défaut », c'est-à-dire $A_1 \cap D$.
Cet événement comporte $0,25 \times 0,05 \times n$ issues, on a donc :

$$p\left(A_1 \cap D\right) = \frac{0,25 \times 0,05 \times n}{n} = 0,25 \times 0,05 = p\left(A_1\right) \times p_{A_1}\left(D\right) = 0,0125$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} p\left(D\right) &= p\left(A_1 \cap D\right) + p\left(A_2 \cap D\right) + p\left(A_2 \cap D\right) \\ &= p\left(A_1\right) \times p_{A_1}\left(D\right) + p\left(A_2\right) \times p_{A_2}\left(D\right) + p\left(A_3\right) \times p_{A_3}\left(D\right) \\ &= 0,25 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001 = 0,05285 \end{aligned}$$

1. Rappels sur les probabilités.
2. Tableaux de répartition et fréquences conditionnelles.

1.2 Définitions – Propriétés

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarques : 1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $p_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Remarque : Cette propriété découle directement de la définition. Elle permet de calculer la probabilité d'un événement représenté par une chemin sur un arbre de probabilités (voir figure 1).

Propriété 2 : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements deux-à-deux incompatibles et $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
Alors :

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

Remarque : Ce n'est qu'une généralisation de la propriété de Seconde concernant les événements incompatibles.

Définition : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux incompatibles et si $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Conséquence : Formule des probabilités totales
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un événement. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(B) & = & p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) \\ & \text{où} & p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B) \end{array}$$

Remarque : On utilise souvent cette formule à l'aide d'un arbre pondéré, en suivant les règles suivantes :
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
- la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent (c'est la formule des probabilités totales).

Exercices : 3, 4 page 356 ; 6 page 357 et 29, 31 page 366 [3] – 1, 2 page 355 ; 7, 8, 9 page 357 [4] – 10, 11 page 357 ; 18 page 360 et 33, 35, 36 page 367 [5] – 19 page 360 et 42 page 369 [6] [TransMath]

Modules : TP 22 page 362 [7] – TP 23 page 364 [8] [TransMath]

Exercices de synthèse : 45 page 369 [9] – 57 page 373 [10] [TransMath]

3. Utilisation des formules.
4. Construire et exploiter un arbre pondéré.
5. Trouver une probabilité conditionnelle.
6. Probabilités et suites.
7. Algorithmique.
8. Test de dépistage.
9. Test de dépistage.
10. Type BAC.

2 Indépendance

2.1 Événements indépendants

Définition : A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On dit que A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque : Attention ! Ceci n'a rien à voir avec des événements incompatibles. En effet, pour des événements incompatibles, $p(A \cap B) = 0$. on ne peut donc pas avoir $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Propriété : A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.

Remarques : 1. Ceci est dû au fait que $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$.

2. Deux événements sont donc indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité de l'autre.

Exemple : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note :

l'événement A : « la carte est une dame »

l'événement B : « la carte est un cœur »

On a : $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
De plus, l'événement $A \cap B$ est « obtenir la dame de cœur » donc $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$.
On a $p(A) \times p(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = p(A \cap B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Exercices : 12, 13 page 358 et 37, 38 page 367[11] – 56 page 373[12] [TransMath]

2.2 Passage aux événements contraires

Propriété : Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B, pour les événements A et $\overline{B}$ et pour les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Démonstration (exigible) :
Comme A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
De plus, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{A} \cap B\right) &= p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(B) - p(A) \times p(B) \\ &= (1 - p(A)) \times p(B) \\ &= p\left(\overline{A}\right) \times p(B) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Pour montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, il suffit d'échanger les rôles de A et de B dans la démonstration précédente.
Par suite, comme $\overline{A}$ et B sont indépendants, en utilisant le résultat précédent, on obtient que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice : 54 page 373[13] [TransMath]

11. Événements indépendants.
12. QCM.
13. Restitution Organisée des Connaissances.

3 Un exemple d'étude de suite définie à partir des probabilités conditionnelles

Exemple : tiré de l'exercice 57 page 373 [TransMath]

1. (a) On déduit de l'énoncé que $P(E_1) = \frac{2}{5} = 0,4$; $P_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5} = 0,6$ et $P_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{2}{5} = 0,4$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(E_1 \cap E_2) + p\left(\overline{E_1} \cap E_2\right) \\ &= p(E_1) \times P_{E_1}(E_2) + p\left(\overline{E_1}\right) \times P_{\overline{E_1}}(E_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} \end{aligned}$$

(b) On peut résumer la situation par l'arbre pondéré de la figure 2.

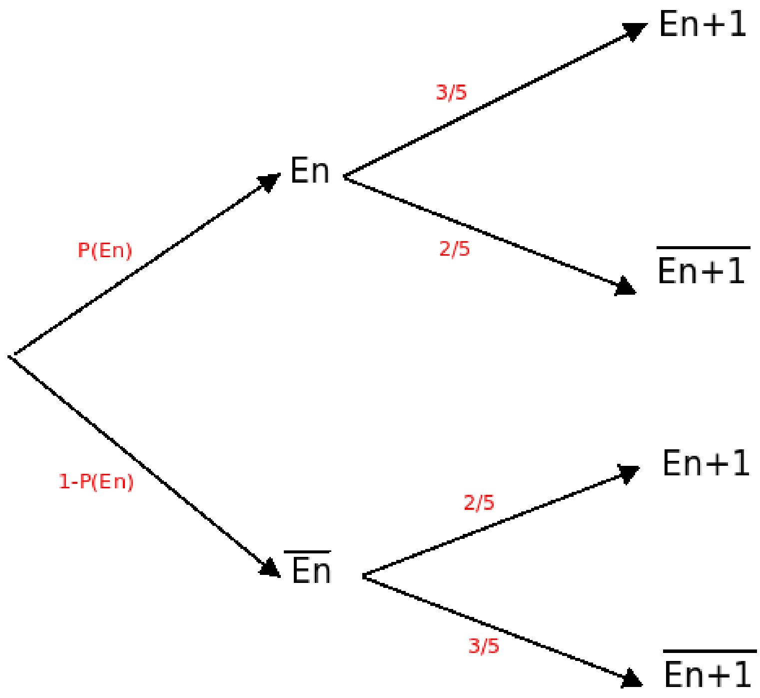

FIGURE 2 – Un arbre pondéré

On a donc :

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= \frac{3}{5}P(E_n) + \frac{2}{5}(1 - P(E_n)) \\ &= \frac{3}{5}P(E_n) + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}P(E_n) \\ &= \frac{1}{5}P(E_n) + \frac{2}{5} = 0,2P(E_n) + 0,4 \end{aligned}$$

2. On peut remarquer que l'on a $u_n = P(E_n)$.

(a) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 0,5.

Initialisation : $u_1 = 0,4 \leq 0,5$

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $u_n \leq 0,5$.
On veut montrer que $u_{n+1} \leq 0,5$.

$$\begin{aligned} u_n &\leq 0,5 \\ 0,2u_n &\leq 0,1 \\ 0,2u_n + 0,4 &\leq 0,5 \\ u_{n+1} &\leq 0,5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout n, $u_n \leq 0,5$. La suite (u_n) est donc majorée par 0,5.

(b) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq u_n$.

Initialisation : $u_1 = 0,4$ et $u_2 = 0,48$.
On a bien $u_2 \geq u_1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $u_{n+1} \geq u_n$.
On veut montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & \geq & u_n \\ 0,2u_{n+1} & \geq & 0,2u_n \\ 0,2u_{n+1}+0,4 & \leq & 0,2u_n+0,4 \\ u_{n+2} & \geq & u_{n+1} \end{array}$$

Donc, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
On note l la limite de la suite (u_n).
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
En passant à la limite, l'égalité :

$$u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4$$

devient :

$$\begin{array}{rcl} l & = & 0,2l+0,4 \\ 0,8l & = & 0,4 \\ l & = & \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5 \end{array}$$

Donc la suite (u_n) converge vers 0,5.

3. (a) Les probabilités $P(E_n)$ sont donc croissantes et convergent vers 0,5.

(b) En utilisant le mode récurrence de la calculatrice (ou un tableur), on voit que :

$$0,49999 \leq P(E_n) \leq 0,5$$

dès que $n \geq 7$.

Exercices : 46 page 369 ; 47 page 370 et 62 page 375 [14] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 4, 5, 6

14. Suites et probabilités.