Fonctions Polynômes

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

En préliminaire au cours :

Exercice : Exercice 102 page 123 [1] [Intervalle]

Activité : Activité page 108 [2] [Intervalle]

1 Dérivée d'une fonction polynôme

1.1 Quelques rappels

Définitions : — On dit que la fonction f est un polynôme du second degré si f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$.

— On dit que la fonction f est un polynôme du troisième degré si f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

avec $a \neq 0$.

Exemples :
1. Les fonctions $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$; $f(x) = -x^2 + 1$ et $f(x) = 3x^2$ sont des fonctions polynômes du second degré.
2. La fonction $f(x) = x(x+2)$ est aussi une fonction polynôme du second degré car, en développant, on obtient $f(x) = x^2 + 2x$.
3. Les fonctions $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 5$ et $f(x) = x^3 - 3x$ sont des fonctions polynômes du troisième degré.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées (voir figure 1), on dit que la fonction f est dérivable en a et on appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de cette tangente.
Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

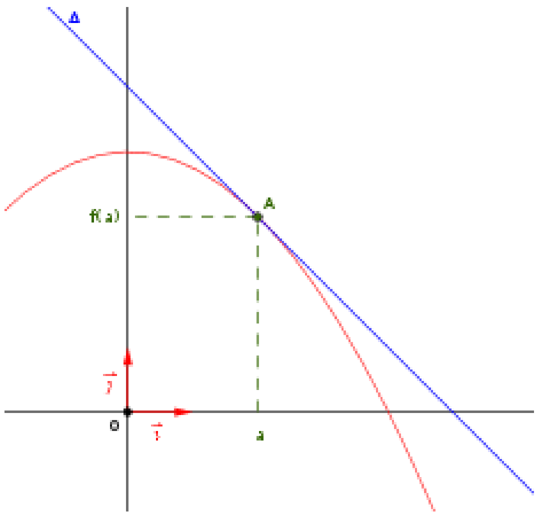

FIGURE 1 – Tangente à une courbe

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre :

1. QCM – Révisions sur les fonctions.
2. Déjà vu...

- $f'(a)$: nombre dérivé de f en a, coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ;
- $f(a)$: image de a par f, ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.

Propriété :
- Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré. Alors, sa fonction dérivée est :
$$f'(x) = 2ax + b$$
- Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynôme du troisième degré. Alors, sa fonction dérivée est :
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Remarque : En particulier, on a :
- La fonction dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$.
- La fonction dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

Exercices : 2, 3, 5, 6, 7 page 115[3] – 14, 16 page 116[4] [Intervalle]

1.2 Cas général

Pour dériver n'importe quelle fonction polynôme, on utilisera les deux propriétés suivantes (admises) :

Propriété 1 : (admise)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$, où k est une constante réelle. alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, où n est une entier supérieur ou égal à 1. alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Remarque : Les cas d'utilisation les plus fréquents de ces résultats sont regroupés dans le tableau 1.

$f(x)$	k (constante)	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$

TABLE 1 – Dérivée de x^n

Exemples :
1. La fonction $f(x) = 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 0$.
2. La fonction $f(x) = x^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 7x^6$.

Propriété 2 :
1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel. Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est ku'. On note : $(ku)' = ku'$.
2. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' + v'$. On note : $(u + v)' = u' + v'$.

Remarque : De la même façon, on a donc $(u - v)' = u' - v'$.

Exemples :
1. La fonction $f(x) = 3x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f'(x) = 3 \times 5x^4 = 15x^4$
2. La fonction $f(x) = -3x^3 - x^2 + 4x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 4 \times 1 - 0 = 9x^2 - 2x + 4$

Exercices : 9, 10, 12 page 115 et 29, 30, 33 page 116[5] [Intervalle]

3. Dérivées des fonctions usuelles.
4. Formules de dérivation.
5. Calcul de dérivées.

2 Applications de la dérivation

2.1 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarques : 1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.

2. Pour étudier les variations d'une fonction, il faut donc étudier le signe de sa dérivée. Pour cela, on pourra se reporter à la fiche de révisions sur les études de signes.

Exemple : 1. f définie sur $I = [-2\,;\,10]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
On a $f'(x) = 2x + 2 \times 1 - 0 = 2x + 2$.
Il faut déterminer le signe de f'.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $2x+2$		$-$	0	$+$	

Or, ici, $x \in [-2\,;\,10]$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-2		-1		10
Signe de $f'(x)$				$+$	
Variations de $f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	117

2. Soit g la fonction définie sur $[-3\,;\,4]$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 30$.
On a $g'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 \times 1 = 6x^2 + 6x - 12$.
Il faut déterminer le signe de g'. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324$.
$\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{-6-\sqrt{324}}{12} = \frac{-6-18}{12} = \frac{-24}{12} = -2$ et $x_2 = \frac{-6+\sqrt{324}}{12} = \frac{-6+18}{12} = \frac{12}{12} = 1$.
On en déduit le signe de g' :

x	-3		-2		1		4
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de g :

x	-3		-2		1		4
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $g(x)$	39	$\nearrow$	50	$\searrow$	23	$\nearrow$	158

Remarque : on dit que la fonction g admet un maximum local en $x = -2$ et en $x = 4$ et un minimum local en $x = -3$ et $x = 1$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$, *distinct des extrémités* de I.

1. Si f a un extremum local en x_0, alors nécessairement, $f'(x_0) = 0$.
2. Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

Exercices : 54, 55, 57, 59, 61, 63 page 117 [6] – 76 page 117 et 78, 79, 80, 81, 82 page 118 [7] – 99, 100 page 122 [8] – 106 page 125 ; 108, 109 page 126 et 112 page 127 [9] [Intervalle]

6. Étude de variations.
7. Extremums locaux.
8. Contrôle d'un tableau de variations avec un tracé de courbe.
9. Type BAC.

2.2 Équation de la tangente

On veut déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant une fonction f au point d'abscisse a. Pour cela, on utilisera les deux résultats suivants (voir figure 1) :

— le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé $f'(a)$;

— cette tangente passe par le point $A\,(a\,;\,f(a))$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
On veut déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentant f au point d'abscisse 2.

— L'équation de cette tangente est de la forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur de la tangente est $f'(2)$.
Or, $f'(x) = 2x - 2$ donc $f'(2) = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2$.
Le coefficient directeur de T est donc $m = 2$.

— L'équation de T est donc de la forme $y = 2x + p$.
Cette tangente passe par le point $A\,(2\,;\,f(2))$ avec $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 4 - 4 - 1 = -1$.
Elle passe donc par le point $A\,(2\,;\,-1)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} -1 & = & 2 \times 2 + p \\ -1 & = & 4 + p \\ -1 - 4 & = & p \\ -5 & = & p \end{array}$$

L'équation de la tangente T est donc $y = 2x - 5$.

Exercices : 86, 89 page 119 [10] – 111 page 127 [11] [Intervalle]

Références

[Intervalle] Collection Intervalle, Mathématiques, programme 2013, Term STMG, Nathan, 2013.

2, 3, 4, 5

10. Équation de tangentes.
11. Vrai-Faux.