Intégration – Primitives

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

En préliminaire au cours :

Activité : Activité 1 page 192[1] [TransMath]

1 Rappels et compléments

1.1 Rappels de dérivation

1.1.1 Dérivation en un point

Nombre dérivée :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Équation de la tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

1.1.2 Dérivées des fonctions usuelles

Les résultats sont regroupés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles.

1.1.3 Opérations sur les fonctions dérivées

Les résultats sont regroupés dans le tableau 2

1.2 Complément : continuité d'une fonction

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarques : 1. Il ne suffit pas que la fonction soit définie en a pour qu'elle soit continue en a. Par exemple, la fonction partie entière (voir figure 1) est définie en 2 mais n'est pas continue en 2 : $E(2) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} E(x) = 1$.

1. Aire sous la parabole.

	Opération	Dérivée	Conditions d'utilisation
Somme de deux fonctions	$u+v$	$u'+v'$	u et v dérivables sur I
Multiplication par une constante	ku	ku'	u dérivable sur I
Produit de deux fonctions	uv	$u'v+uv'$	u et v dérivables sur I
Inverse d'une fonction	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$
Quotient de deux fonctions	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$

TABLE 2 – Opérations sur les fonctions dérivées.

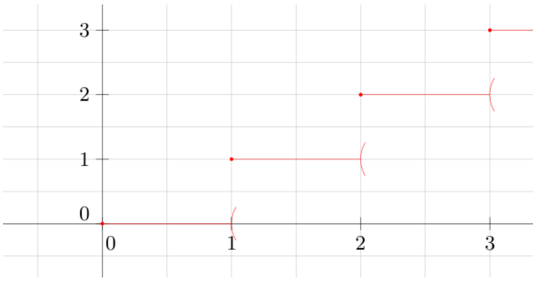

FIGURE 1 – Fonction partie entière

2. On peut aussi écrire : $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel x_0 de l'intervalle I.

Remarques : 1. Graphiquement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer sa représentation graphique « sans lever le crayon ».

2. Cette notion sera étudiée plus en détail dans le chapitre « Continuité – Dérivation ».

2 Notion d'intégrale

Dans toute cette section, $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ désigne un repère orthogonal.
$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative d'une fonction f dans le repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

2.1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1 : On appelle unité d'aire du repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ la mesure des aires, notée u.a., telle que :

$$1 \text{ u.a.} = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$

Il s'agit de l'aire du rectangle unité $OIKJ$ (voir figure 2).

Définition 2 : Intégrale d'une fonction continue positive
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ (voir figure 4).
On la note :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

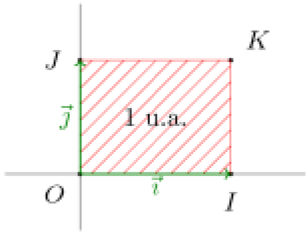

Figure 2 – Unité d'aire

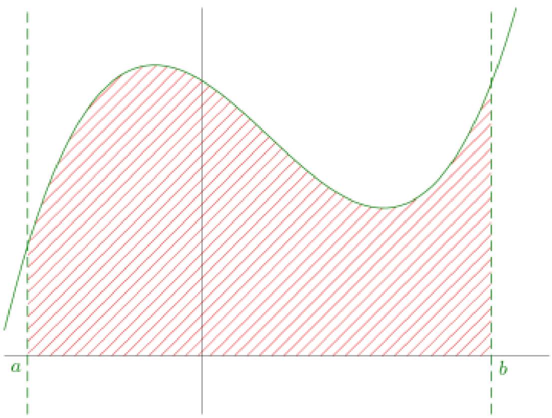

Figure 3 – Intégrale d'une fonction continue positive

Remarques : 1. Ceci se lit : « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou bien « somme[2] de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

2. On dit que la variable x est muette. On peut ainsi noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exemples : 1. Fonction constante $f(x) = 5$ (voir figure 4)

$$\int_{-2}^{5} 5\mathrm{d}x = 5(5-(-2)) = 5 \times 7 = 35$$

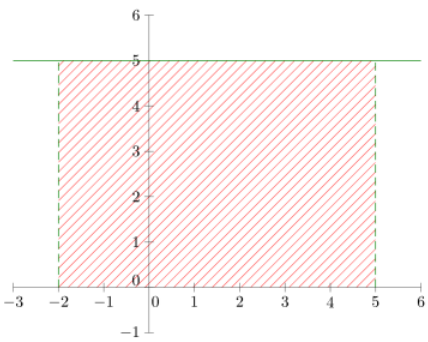

FIGURE 4 – Intégrale d'une fonction constante positive

2. Fonction affine $f(x) = x + 1$, positive sur $[2\,;\,4]$ (voir figure 5)

$$\int_2^4 (t+1)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{CDE} = 3 \times 2 + \frac{2 \times 2}{2} = 6 + 2 = 8$$

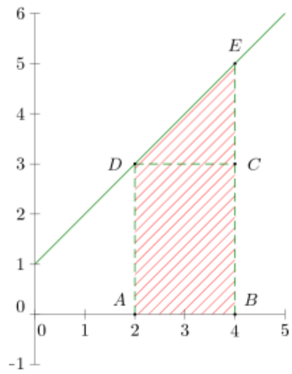

FIGURE 5 – Intégrale d'une fonction affine positive

3. En utilisant la méthodes des rectangles (voir activité 1 page 192[3] [TransMath] et algorithme `aire-rect.alg`), on montre que :

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

2. Pour comprendre l'utilisation du mot « somme », voir l'activité de la feuille polycopiée.
3. Aire sous la parabole.

Remarque : On peut utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale (voir TP 45 page 210 [4] [TransMath]).

Exercices : 18 page 203 ; 50 page 216 (première courbe uniquement) et 55 page 216 [5] – 51 page 216 et 60 page 217 [6] [TransMath]

2.2 Dérivabilité de la fonction aire

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors, la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $\Phi' = f$.

Remarque : La fonction Φ représente, en unités d'aire, l'aire sous la courbe représentant la fonction f, sur l'intervalle $[a\,;\,x]$ (voir figure 6).

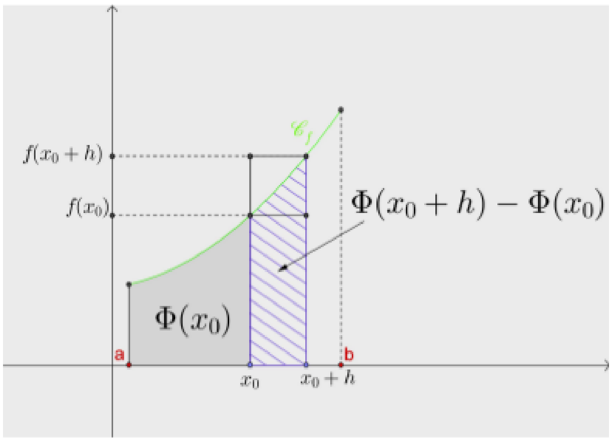

FIGURE 6 – Dérivabilité d'une fonction aire

Démonstration partielle (exigible)
On se place dans le cas où f est croissante sur $[a\,;\,b]$.
Soit x_0 et x_0+h deux nombres de l'intervalle $[a\,;\,b]$ (voir figure 6).

– Si $h > 0$:
Comme f est croissante sur $[a\,;\,b]$, on a :

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0+h)$$

et, par suite :

$$f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

– Si $h < 0$, on montre de même que :

$$f(x_0+h) \leq \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

4. Trouver une valeur approchée d'une aire.
5. Utiliser les aires pour calculer une intégrale.
6. Propriétés de la fonction aire.

Comme f est continue en x_0, on a $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ et, donc, par encadrement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

On en déduit donc que la fonction Φ est dérivable en x_0 et que $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Remarque : On a donc montré que la fonction Φ, aire sous la courbe de la fonction f, est une fonction *dont la dérivée est* f. On dit que Φ est une primitive de f.

3 Primitives d'une fonction continue

3.1 Définition, premières propriétés

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I si, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque : On admettra provisoirement que toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. Ce résultat sera montré dans la section 3.3.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1. Pour tout réel C, la fonction $x \longrightarrow F(x) + C$ est aussi une primitive de f sur I.
2. Si G est une primitive de f sur I, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in I$:

$$G(x) = F(x) + C$$

Démonstration :
Le 1. est évident.
2. On note $\phi(x) = G(x) - F(x)$.
On a $\phi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ sur l'intervalle I, donc la fonction ϕ est constante sur I.
Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$, $\phi(x) = 0$, c'est-à-dire $G(x) = F(x) + C$.

Remarque : Toute fonction continue admet donc une infinité de primitives. Toutes les primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.

Corollaire : Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une et une seule primitive G de f sur l'intervalle I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration :
Soit F une primitive de f.
Toutes les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
On veut $G(x_0) = y_0$, c'est-à-dire $F(x_0) + C = y_0$; d'où $C = y_0 - F(x_0)$.
L'existence et l'unicité de C entraîne l'existence et l'unicité de la primitive G.

Exercices : 2, 3 page 200 et 62 page 217 [7] – 4 page 200 et 64 page 217 [8] – 67 page 217 [9][TransMath]

7. Vérifier que F est une primitive de f.
8. Primitives d'une même fonction.
9. Courbe d'une primitive.

3.2 Calcul d'intégrale d'une fonction continue et positive

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Soit F une primitive *quelconque* de f sur I.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration :
Soit $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. On a vu que Φ est une primitive de f sur I.
Par suite, comme F est aussi une primitive de f, il existe une constante C telle que $G(x) = F(x) + C$.
De plus, $\Phi(a) = 0 = F(a) + C$ donc $C = -F(a)$ et $\Phi(x) = F(x) - F(a)$.
On aboutit donc à $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui, appliqué en $x = b$, donne le résultat voulu.

Remarque : on écrira ce résultat sous la forme suivante :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple : On veut calculer $\int_1^3 \left(t^3 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t$.
On pose $f(t) = t^3 + 2t + 1$. f est continue et positive sur $[1\,;\,3]$.
Soit $F(t) = \frac{t^4}{4} + t^2 + t$. On a :

$$F'(t) = \frac{1}{4} \times 4t^3 + 2t + 1 = t^3 + 2t + 1 = f(t)$$

Par suite, F est une primitive de f sur $[1\,;\,3]$.
On a donc :

$$\int_1^3 \left(t^3 + 2t + 1\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4} + 9 + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 + 1\right) = \frac{81}{4} + 12 - \frac{1}{4} - 2 = \frac{80}{4} + 10 = 30$$

3.3 Existence de primitives d'une fonction continue

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarques : 1. On a déjà montré ce résultat pour des fonctions continues et positives au 2.2.

2. Pour la démonstration, on admettra le résultat suivant : « *Toute fonction continue sur un intervalle* $[a\,;\,b]$ *admet un minimum et un maximum sur* $[a\,;\,b]$ ».

Démonstration partielle (exigible)
On se limitera au cas où I est un intervalle fermé de la forme $[a\,;\,b]$.
On note alors m le minimum de f sur $[a\,;\,b]$ et on note $g(x) = f(x) - m$.
g est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$, elle admet donc une primitive G sur $[a\,;\,b]$.
On a donc $G'(x) = g(x) = f(x) - m$.
On note F la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.
F est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $F'(x) = G'(x) + m = f(x) + m - m = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.

4 Recherche de primitives

4.1 Primitives des fonctions usuelles

Les résultats du tableau 3 se retrouvent facilement par une lecture « inversée » du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles.

fonction f	primitives F	Domaine de validité
$f(x) = a$ (a constante)	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier ≥ 2)	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0\,;\,+\infty[$

TABLE 3 – Primitives des fonctions usuelles

4.2 Primitives et opérations sur les fonctions

On tire facilement des règles de calcul sur les dérivées le résultat suivant :

Propriété : 1. Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

2. Si F est une primitive de f sur I et si $k \in \mathbb{R}$, kF est une primitive de kf sur I.

Remarque : Attention ! Il n'y a pas de résultats analogues sur les produits et les quotients de fonctions (ce n'était déjà pas le cas pour la dérivation).

Exercices : 69, 70 page 217[10] – 12, 16 page 202[11] [TransMath]

5 Intégrale d'une fonction continue – Cas général

5.1 Extension de la définition

On peut remarquer que la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

donnée pour des fonctions continues et positives, a encore du sens lorsque la fonction n'est plus nécessairement positive.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$.
On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

10. Recherche de primitives.
11. Primitive vérifiant une condition initiale.

Remarque : Ce nombre ne représente plus une aire sous la courbe, et n'est pas nécessairement positif.

Propriété : Soit f une fonction continue sur I et a, $b \in I$.

$$\int_a^a f(t)\,\mathbf{d}t = 0$$

$$\int_b^a f(t)\,\mathbf{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathbf{d}t$$

Démonstration :

On note F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

$$\int_{-1}^{3} (-3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{3} = -\frac{3\times 3^2}{2} - \left(-\frac{3\times(-1)^2}{2}\right) = -\frac{27}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{24}{2} = -12$$

$$\int_2^1 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^1 = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 -\mathrm{e}^{-t+1}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t+1}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$$

Exercices : 20, 23(a. uniquement), 24 (a. uniquement) et 25 (a. uniquement) page 204 et 79, 82 (c. uniquement) page 218 [12] [TransMath]

5.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, $b \in I$ et $k \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration :

On note F une primitive de f et G une primitive de g sur I.
Comme kF est une primitive de kf, on a :

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

12. Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.

Comme $F+G$ est une primitive de $f+g$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= [F(x)+G(x)]_a^b \\ &= F(b)+G(b)-F(a)-G(a) \\ &= (F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Conséquences : — *Intégrale d'une fonction continue négative*

Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a\,;b]$.

L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ l'opposé de l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ (voir figure 7).

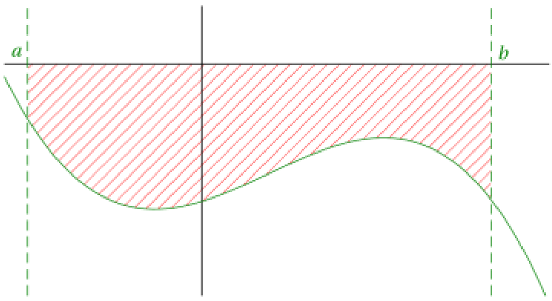

FIGURE 7 – Intégrale d'une fonction continue négative

En effet, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b(-f(t))\,\mathrm{d}t$, où $-f$ est une fonction continue et positive, dont la courbe est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

— *Aire du domaine entre deux courbes*

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, avec $f(x)\geq g(x)$ sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est :

$$\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$$

Pour des fonctions continues et positives, si $f\geq g$, cette aire est :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t$$

Exercices : 58 page 216 et 103, 104 page 220[13] [TransMath]

5.3 Relation de Chasles

Théorème : Relation de CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, $c\in I$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

13. Calculs d'aires.

Démonstration :
On note F une primitive de f sur I.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c \\
&= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
&= F(c) - F(a) \\
&= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Conséquence : *Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque*
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.
L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ comptée :
— positivement si $f(x) \geq 0$;
— négativement si $f(x) \leq 0$.
Sur la figure 8, on a donc :

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

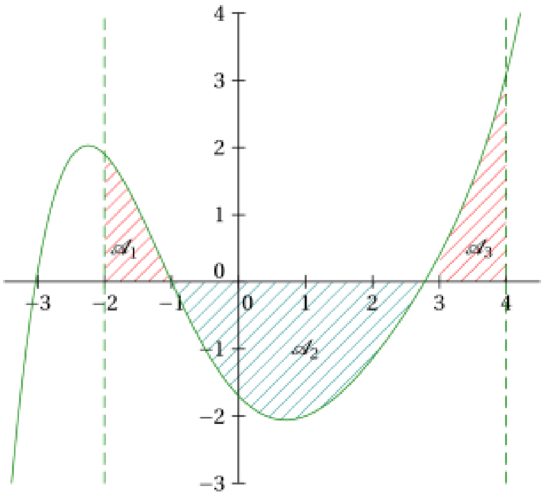

FIGURE 8 – Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Exercices : 19 page 203 ; 50, 57 page 216 ; 109 page 221 et 128 page 226 [14] [TransMath]

5.4 Positivité, inégalité de la moyenne

Théorème : Positivité, Comparaison d'intégrales
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, $b \in I$ avec $a \leq b$.

1. Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
2. Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

14. Intégrales et aires.

Démonstration :
Le 1. est évident (pour une fonction positives, l'intégrale est l'aire sous la courbe)
2. On note $\phi = g - f$.
Pour tout $x \in [a\,,\,b]$, $\phi(x) \geq 0$ donc, d'après le 1., $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, soit $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0$.
En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ puis $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarques : 1. Attention ! L'hypothèse $a \leq b$ est essentielle car, si $a > b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. La réciproque de ce théorème est fausse.

Corollaire : Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a \leq b$.
Soient m et M deux réels tel que, pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Démonstration :
Comme pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, d'après le théorème précédent :

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x$$

Or $\int_a^b m\mathrm{d}x = m(b-a)$ et $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$. D'où le résultat.

Exercices : 93 page 219[15] – 31, 32 page 206 ; 95 page 219 ; 101 page 220 et 131 page 227[16] – 42 page 209 et 143 page 229[17] [TransMath]

5.5 Valeur moyenne

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On appelle valeur moyenne de f entre a et b le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque : Si f est positive sur $[a\,;\,b]$, μ correspond à la hauteur du rectangle construit sur $[a\,;\,b]$, dont l'aire, exprimée en u.a. est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (voir figure 9).

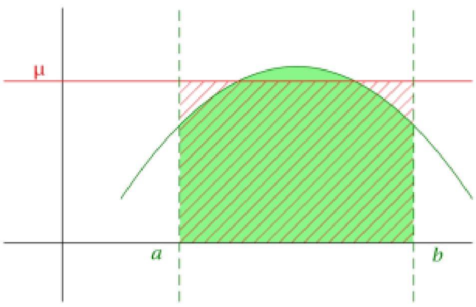

FIGURE 9 – Valeur moyenne

Exercices : 97 page 219[18] [TransMath]

15. Comparaison d'intégrales.
16. Encadrements d'intégrales.
17. Suites d'intégrales.
18. Valeur moyenne.

5.6 Un exemple d'Étude d'une suite d'intégrales

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

- Comme pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $t\mathrm{e}^{-nt} \geq 0$, on a $u_n \geq 0$.
  La suite (u_n) est donc minorée par 0.
- On note $f_n(t) = t\mathrm{e}^{-nt}$.
  Pour tout $t \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) - f_n(t) &= t\mathrm{e}^{-(n+1)t} - t\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t\mathrm{e}^{-nt} \times \mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-nt} \\ &= t\mathrm{e}^{-nt}\left(\mathrm{e}^{-t} - 1\right) \\ &= t\mathrm{e}^{-nt}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t} - 1\right) \end{aligned}$$

  Comme $t \in [0\,;\,1]$, $t\mathrm{e}^{-nt} \geq 0$ et, la fonction exponentielle étant croissante, $\mathrm{e}^t \geq \mathrm{e}^0 = 1$ et donc, par passage à l'inverse, $\frac{1}{\mathrm{e}^t} \leq 1$, d'où $\frac{1}{\mathrm{e}^t} - 1 \leq 0$.
  On a donc, pour tout $t \in [0\,;\,1]$, $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$, c'est-à-dire $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$.
  En passant aux intégrales, on obtient :

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

  On obtient donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
- La suite (u_n) est décroissante, minorée. Elle est donc convergente.
- Reste à déterminer la limite de (u_n). Pour cela, on va chercher à l'encadrer.
  On a déjà vu que, pour tout n, $u_n \geq 0$.
  De plus, pour tout n et tout $t \in [0\,;\,1]$, on a :

$$t\mathrm{e}^{-nt} \leq \mathrm{e}^{-nt}$$

  En passant aux intégrales, on obtient :

$$u_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t$$

  De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{0,}^1 t\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nt}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{n}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) \leq \frac{1}{n} \text{ car l'exponentielle est toujours positive.} \end{aligned}$$

  On a donc :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

  Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, en utilisant le théorème « des gendarmes », on en déduit que la suite (u_n) converge vers zéro.

Exercices : 34 page 206 ; 42 page 208 ; 130 page 227 et 143 page 229 [19] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15

19. Suites d'intégrales.