La fonction exponentielle

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

En préliminaire au cours :

Activités : Activités 1 page 78 [1] et 2 page 79 [2] [TransMath]

1 Existence et unicité de la fonction exponentielle

1.1 Deux résultats préliminaires

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a, b deux nombres, avec $a \neq 0$.
Alors, la fonction $g : x \longrightarrow f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' est définie par :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

Remarque : Ce résultat est provisoirement admis. Il sera montré dans le chapitre « Continuité – Compléments de dérivation ».

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$
- $f(0) = 1$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

Démonstration (exigible) :
Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, la fonction $x \longrightarrow f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par suite, ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$$

Or, comme, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, on a :

$$\phi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$$

On obtient donc que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f(0) = 1$, $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = f(x) \times f(-x) = 1$.
Par suite, la fonction f ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Au cours de la démonstration, on a montré de plus que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.

1.2 La fonction exponentielle

Théorème – Définition : Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$.
Cette fonction est appelée exponentielle et on la note $\exp : x \longrightarrow \exp(x)$.

Démonstration (exigible) :
On admettra l'existence d'une telle fonction.
Reste à montrer l'unicité d'une telle fonction. Supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = g(x) \times f(-x)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = g'(x) \times f(-x) + g(x) \times (-f'(-x)) = g'(x) \times f(-x) - g(x) \times f'(-x)$$

1. La croissance exponentielle.
2. Vers une fonction égale à sa dérivée.

Or, comme, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$, on a :

$$\phi'(x) = g(x) \times f(-x) - g(x) \times f(-x) = 0$$

On obtient donc que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, $\phi(0) = g(0) \times f(0) = 1$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = g(x) \times f(-x) = 1$$

Comme de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \times f(-x) = f(x) \times f(-x)$$

On a déjà montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) \neq 0$. On peut donc diviser l'égalité précédente par $f(-x)$.
On obtient donc que, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$. D'où l'unicité de la fonction f.

1.3 Premières propriétés

On a déjà obtenu les résultats suivants :

Propriété : — La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp)'(x) = \exp(x)$
— $\exp(0) = 1$
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Remarque : En utilisant la **Propriété 1** du 1.1, on obtient le résultat suivant :
Soit a, b deux nombres, avec $a \neq 0$.
Alors, la fonction $g : x \longrightarrow \exp(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée g' est définie par :

$$g'(x) = a\exp(ax+b)$$

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

2.1 Quelques propriétés

Théorème 1 : Soient a et b deux réels. Alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

Démonstration :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x) = \frac{(\exp)'(a+x)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = h(x)$$

De plus, $h(0) = \frac{\exp(a+0)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$.
On a donc $h' = h$ et $h(0) = 1$. Or, d'après le 1.2, une telle fonction est unique.
D'où $h(x) = \exp(x)$, c'est-à-dire $\frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$ ou encore $\exp(a+x) = \exp(a)\exp(x)$.
En particulier, pour $x = b$, on obtient $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Théorème 2 : Soient a, b deux réels et n un entier relatif.

1. $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
2. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
3. $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration :
1. D'après le théorème 1 : $\exp(a-a) = \exp(a)\exp(-a)$.
De plus, $\exp(a-a) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(a)\exp(-a) = 1$ et comme $\exp(a) \neq 0$, $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$.
2. D'après le théorème 1 : $\exp(a-b) = \exp(a)\exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
3. Le résultat se montre aisément par récurrence pour $n \geq 0$.
Pour $n < 0$, il suffit d'utiliser le résultat du 2. pour conclure.

Remarque : On retrouve des propriétés similaires à celles des puissances. D'où l'idée d'adapter les notations [3].

2.2 Une nouvelle notation

Définition : On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle.
On a donc $\exp(1) = \mathrm{e}$.

Remarques : 1. A la calculatrice, on obtient $\mathrm{e} \simeq 2,71828$.
2. En utilisant le Théorème 2, on obtient :

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$$

On va généraliser cette notation.

Définition : Pour tout réel x, on note :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

Remarque : ceci se lit indifféremment « exponentielle x » ou « e exposant x ».

On a déjà obtenu les résultats suivants :

Propriété :
— $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$
— Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$; $\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}$ et $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Exercices : 25, 37, 38, 39 page 96 [4] [TransMath]

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Dérivée de la fonction exponentielle

On a déjà vu le résultat suivant :

Propriété :
— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
— Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, la fonction $x \to \mathrm{e}^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(\mathrm{e}^{ax+b}\right)' = a\mathrm{e}^{ax+b}$.

Exercices : 41, 42, 43, 45 page 96 [5] [TransMath]

3. Ceci ne sera pas entièrement justifié en classe de Terminale S.
4. Simplification d'écritures comportant des exponentielles.
5. Calcul de dérivées.

3.2 Signe – Variations

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Démonstration :
On peut remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Par suite, $e^x > 0$.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : En effet, on a vu que $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$.
On en déduit le résultat suivant :

Propriété : Pour tous réels a et b, on a :
- $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
- $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$.
- $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$.

Remarque : En particulier, comme $e^0 = 1$:

$$e^x > 1 \iff x > 0$$

Exercices : 31, 32, 33, 34, 35 page 96[6] – 55 page 97 et 57 page 98[7] – 47, 48 page 97[8] [TransMath]

3.3 Courbe représentative

On peut alors donner le tableau de variations de la fonction exponentielle. on se référera au tableau 1.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$\exp(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	

TABLE 1 – Tableau de variations de $x \to e^x$

On peut alors construire la courbe représentative de la fonction exponentielle à l'aide d'un tableau de valeurs en remarquant que chaque résultat trouvé correspond non seulement à l'ordonnée du point de la courbe mais aussi au coefficient directeur de la tangente (car $(\exp)' = \exp$). On se référera à la courbe de la figure 1.

Remarques : 1. Grâce à la courbe représentative de la fonction exponentielle, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = -\infty$$

On admettra provisoirement ce résultat, qui sera montré dans un cadre plus général dans le chapitre « Limites – Asymptotes ».

6. Résolutions d'équations et d'inéquations.
7. Études de variations.
8. Identifications.

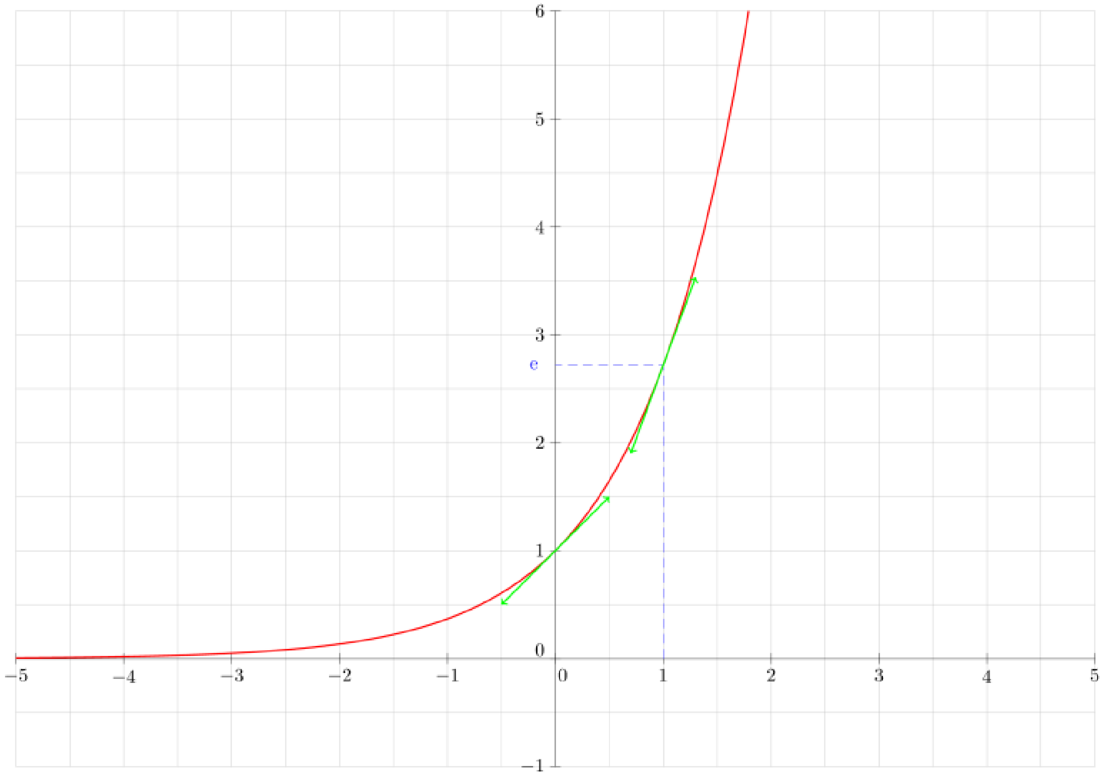

FIGURE 1 – Courbe représentative de $x \to \mathrm{e}^x$

2. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^x \geq x + 1$$

Démonstration :
On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.
On a $\phi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
Or, on a déjà vu que :
- Si $x < 0$, $\mathrm{e}^x < 1$;
- Si $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 1$

On peut donc en déduire le tableau de variations de ϕ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

avec $\phi(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

On peut donc en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x - x - 1 \geq 0$.
Ceci revient bien à $\mathrm{e}^x \geq x + 1$

Exercices : 2 page 85 [9] – 3, 5, 6 page 87 ; 15, 17 page 90 [10] – 16 page 90 [11][TransMath]

9. Une transformation d'écriture.
10. Tangentes.
11. Un problème de dérivabilité.

Exercices de synthèse : 63 page 99 [12] – 66 page 99 [13] – 71, 72 page 100 [14] – 79 page 103 [15] – 82 page 104 [16] – 83 page 104 [17] – 86 page 105 [18] – 87 page 105 [19] [TransMath]

3.4 Primitives de la fonction exponentielle

Propriété : Soit a, b deux nombres, avec $a \neq 0$

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ est $F(x) = \mathrm{e}^{x}$.
2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $g(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ est $F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$.

Exercices : 8 page 201 [20] – 14, 17 page 202 [21] – 41 page 208 [22] – 82 (c) page 218 ; 101 page 220 et 109 page 221 [23] – 93 et 98 (c) page 219 [24] – 115 page 223 [25] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 4, 5, 6, 7

12. Masse salariale.
13. Exploiter une représentation graphique.
14. Applications concrètes.
15. Type BAC.
16. Une famille de fonctions.
17. Suite et fonction exponentielle.
18. Exponentielle et suite.
19. Suite et nombre e.
20. Recherche de primitives.
21. Primitive vérifiant une condition initiale.
22. Recherche d'une primitive.
23. Calcul d'intégrale.
24. Comparaisons d'intégrales
25. Type BAC.