Droites et plans de l'Espace
Calcul vectoriel dans l'Espace

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

1 Positions relatives **3**

1.1 Positions relatives de deux droites . . . 3

1.2 Positions relatives de deux plans . . . 3

1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan . . . 4

1.4 Deux résultats supplémentaires sur le parallélisme . . . 4

2 Vecteurs de l'Espace **5**

2.1 Extension de la notion de vecteur à l'Espace . . . 5

2.2 Calcul vectoriel dans l'Espace . . . 5

2.3 Colinéarité, applications . . . 6

3 Vecteurs coplanaires **6**

3.1 Caractérisation vectorielle d'un plan de l'Espace . . . 6

3.2 Vecteurs coplanaires . . . 7

4 Repérage dans l'Espace **7**

4.1 Définition – Coordonnées . . . 7

4.2 Calcul sur les coordonnées . . . 8

4.3 Colinéarité, coplanarité . . . 9

Table des figures

1 Un plan 3
2 Plans parallèles 4
3 Intersection avec deux plans parallèles 5
4 Théorème du toit 5
5 Relation de Chasles 6
6 Règle du parallélogramme 6
7 Coordonnées dans un repère de l'Espace 8

Liste des tableaux

1 Positions relatives de deux droites 3
2 Positions relatives de deux plans 4
3 Positions relatives d'une droite et d'un plan 4

Quelques rappels

Règles d'incidences : Les règles suivantes sont valables dans l'espace :

1. Par deux points distincts A et B passe une seule droite, notée (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan, noté (ABC).
3. Si un plan contient deux points A et B, il contient toute la droite (AB).
4. Dans tout plan de l'espace, tout résultat de géométrie plane s'applique.

Remarques : 1. Un plan est une « surface » plane « illimitée ». Elle est représentée en perspective par un parallélogramme (voir figure 1).

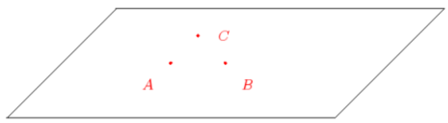


FIGURE 1 – Un plan

2. La dernière règle indique que, dans tout plan de l'espace, tout se passe comme dans « LE » plan de la géométrie plane. On cherchera donc très souvent à se placer dans un plan de l'espace.

1 Positions relatives de droites et de plans

1.1 Positions relatives de deux droites

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

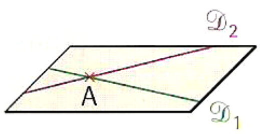
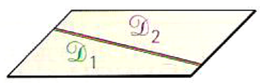
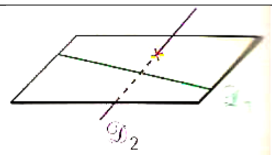
<table>
<tr><td colspan="4">Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Coplanaires</td><td rowspan="2">Non coplanaires</td></tr>
<tr><td>sécantes</td><td>strictement parallèles</td><td>confondues</td></tr>
<tr><td>
un point commun unique</td><td>
pas de point commun</td><td>
tous les points sont communs</td><td>
il n'existe pas de plan contenant les deux droites</td></tr>
</table>

TABLE 1 – Positions relatives de deux droites

Remarques : 1. Attention ! Dans l'espace, il existe des droites qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.

2. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

1.2 Positions relatives de deux plans

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

Remarque : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite. Il suffit donc de déterminer deux points appartenant simultanément aux deux plans pour déterminer cette droite.

Propriété : (admise) Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre. (voir figure 2)

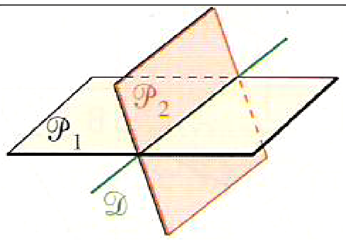
Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	**parallèles**	
	confondus	**strictement parallèles** ou **disjoints**
 leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	 leur intersection est un plan	 leur intersection est vide

TABLE 2 – Positions relatives de deux plans

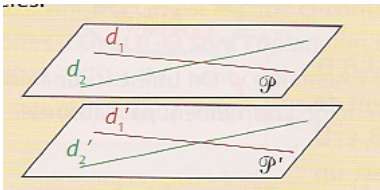


FIGURE 2 – Plans parallèles

1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

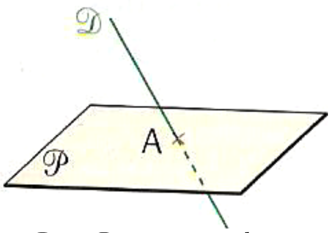
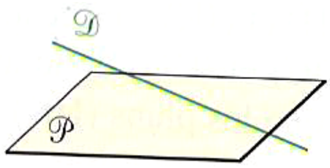
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	**parallèles**	
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	 $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

TABLE 3 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

Remarque : Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

1.4 Deux résultats supplémentaires sur le parallélisme

Théorème 1 : (admis) Si un plan $\mathcal{Q}$ coupe deux plans parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ alors les droites d'intersection sont parallèles (voir figure 3).

Théorème 2 : (admis) (aussi appelée « théorème du toit »)
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles. $\mathcal{P}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$ un plan contenant $\mathcal{D}'$ (voir figure 4).
Si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, leur droite d'intersection Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

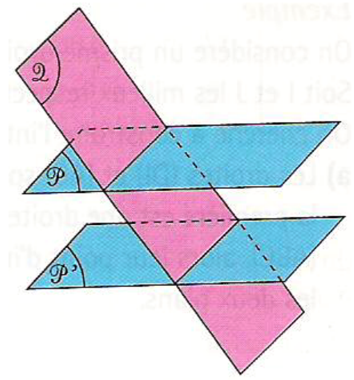


FIGURE 3 – Intersection avec deux plans parallèles

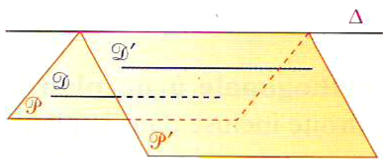


FIGURE 4 – Théorème du toit

Exercices : 1, 2, 3 page 270 et 22, 23, 24, 26 page 278 [1] – 5, 6 page 271 et 27, 2, 29 page 279 [2] [TransMath]
Activité : Section d'un plan sur un cube (sur feuille polycopiée)
Exercices : 13 page 274 ; 31, 32, 34 page 279 et 46 page 281 [3] [TransMath]

2 Vecteurs de l'Espace

2.1 Extension de la notion de vecteur à l'Espace

Dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
- sa direction (la droite (AB)) ;
- son sens (du point A vers le point B) ;
- sa longueur ou norme (la distance AB).

Cette notion se généralise sans problème à l'Espace, avec les mêmes propriétés. Par exemple :

Propriété : Égalité de vecteurs
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

2.2 Calcul vectoriel dans l'Espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés. Par exemple :

Propriété 1 : Relation de Chasles
Pour tous points A, B et C de l'Espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (voir figure 5).

Propriété 2 : Règle du parallélogramme
$OMRN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ (voir figure 6)

1. Intersection d'une droite et d'un plan.
2. Intersections de deux plans.
3. Section d'un polyèdre par un plan.

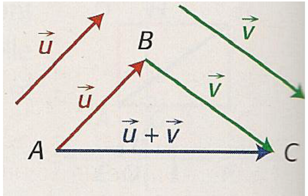


FIGURE 5 – Relation de Chasles

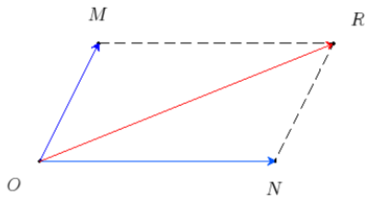


FIGURE 6 – Règle du parallélogramme

Remarques : 1. Ces deux propriétés donnent les deux manières de construire une somme vectorielle (« bout-à-bout » ou à l'aide d'un parallélogramme).

2. Les règles de calculs sur les sommes de vecteurs et sur les multiplications de vecteurs par un réel sont les mêmes que sur les nombres.

Exercices : 43, 44, 46, 47, 48, 51 page 307[4] [TransMath]

2.3 Colinéarité, applications

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel k (c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$).

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

Applications : — Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

— Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice : 1, 2 page 295 et 60, 61 page 309[5] [TransMath]

3 Vecteurs coplanaires

3.1 Caractérisation vectorielle d'un plan de l'Espace

Théorème : Soit A, B et C trois points de l'Espace non alignés.
Un point M est dans le plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Démonstration :
Puisque les points A, B et C ne sont pas alignés, le triplet $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$ forme un repère du plan (ABC).

4. Vecteurs de l'Espace.
5. Colinéarité, applications.

Si $M \in (ABC)$, il existe deux réels x et y tels que le couple $(x\,;\,y)$ soit les coordonnées de M dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$. On a donc : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, on note N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$. On a donc : $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et, par suite $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$. Les points M et N sont donc confondus. D'où $M \in (ABC)$.

Remarque : On peut donc définir un plan par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. On dit alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs directeurs du plan.

3.2 Vecteurs coplanaires

Définitions : 1. On dit que quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.

2. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Il existe quatre points A, B, C et D de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les quatre points A, B, C et D le sont.

Remarques : 1. Deux vecteurs (ou trois points) sont toujours coplanaires.

2. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et, donc, les points A, B, C et D sont coplanaires. Par suite, si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont toujours coplanaires.

Théorème : 1. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
Alors, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

2. Soit A, B, C et D quatre points de l'espace, tels que A, B et C ne soient pas alignés.
Alors, les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$$

Démonstration :
Il faut d'abord remarquer que le 2. n'est qu'une application du 1. aux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Il suffit donc de montrer la première assertion.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C forment un plan.

D'après 3.1, $D \in (ABC)$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$.

Par suite, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Exercices : 3, 4, 5 page 296 ; 62, 63 page 308 et 64 page 309 [6] [TransMath]

4 Repérage dans l'Espace

4.1 Définition – Coordonnées

Définition : On appelle repère de l'Espace tout quadruplet $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ où O est un point de l'Espace et où $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.
Si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit orthogonal.
Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$), on dit que le repère est orthonormal.

6. Coplanarité.

Remarque : Le triplet $\left(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ est appelé base de vecteurs de l'Espace.

Théorème : Soit $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ un repère de l'Espace.

1. Soit M un point de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (voir figure 7).
   Ce triplet est appelé coordonnées de M. On note $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'Espace.
   Il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées de ce point M. Par conséquent :
   Il existe un unique triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.
   Ce triplet est appelé coordonnées de $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

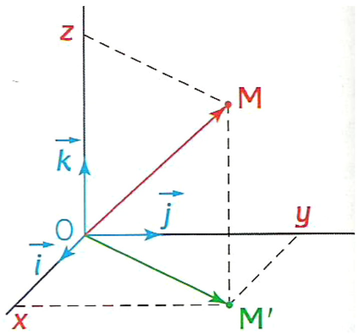


FIGURE 7 – Coordonnées dans un repère de l'Espace

Démonstration (partielle) :
On note (P) le plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Comme $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{k}$ coupe le plan (P) en un point noté M'. On a donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$.
Comme $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$.
Comme $M' \in (P)$, d'après 3.1, on a $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
On obtient donc : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
L'unicité de cette écriture est admise.

Remarques : 1. x est appelé abscisse, y est appelé ordonnée et z est appelé cote.

2. On vient en fait de voir que tout vecteur peut se décomposer de manière unique en fonction de trois vecteurs non coplanaires.

4.2 Calcul sur les coordonnées

Les résultats sont identiques à ceux du plan.
On a, par exemple :

— Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  — les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  — les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont : $I\ \left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

— Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors :

  - les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$
  - Si k est un réel, les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{u}$ sont : $k\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \\ k \times c \end{pmatrix}$
- On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormal.
  - Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors sa norme est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

  - Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exercices : 46, 77, 78, 80, 81 page 309 [7] – 82, 83 page 310 [8] [TransMath]

4.3 Colinéarité, coplanarité

> **Méthode :** — Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
> — Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires) sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.
> Il s'agit donc, grâce aux coordonnées des vecteurs, de trouver ces réels pour montrer la colinéarité ou la coplanarité.

Remarque : Dans l'Espace, il n'existe pas, au niveau de la classe de Terminale S, de propriété simple équivalente à celle des « produits en croix » de coordonnées pour des vecteurs colinéaires du plan.

Exercices : 53, 54, 56, 57, 59 page 309 [9] – 30 page 302 [10] – 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15 page 298 et 70, 73 page 309 [11] – 98, 100, 101 page 311 et 102 page 312 [12]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

5, 6, 7, 9

7. Distances dans l'Espace.
8. Plan médiateur.
9. Colinéarité, applications.
10. Droites sécantes.
11. Coplanarité.
12. Positions relatives de droites et de plans.