Continuité
Compléments de dérivation

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

1 Notion de continuité

1.1 Limite finie en un réel a

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I avec $a \in I$ ou a est une borne de I. Soit l un nombre réel.
On dit que f a comme limite l lorsque x tend vers a si, si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour pour x suffisamment proche de a (voir figure 1).
On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = l$$

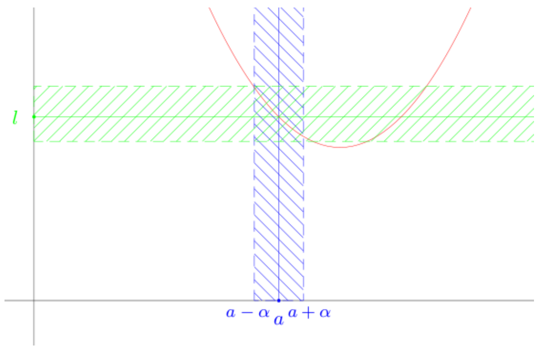

FIGURE 1 – Limite finie lorsque x tend vers le réel a

1.2 Définitions – Exemples

Définition 1 : Soit f une fonction et $a \in \mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque : Il ne suffit pas que la fonction soit définie en a pour qu'elle soit continue en a. Par exemple, la fonction partie entière (voir figure 2) est définie en 2 mais n'est pas continue en 2 : $E(2) = 2$ et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} E(x) = 1$.

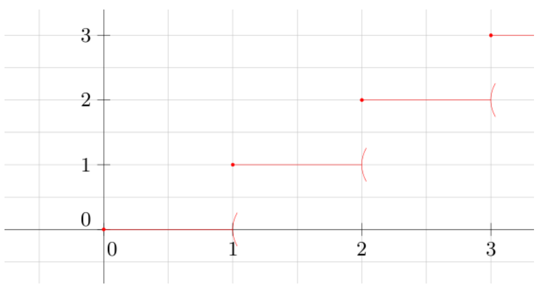

FIGURE 2 – Fonction partie entière

Définition 2 : Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel a de l'intervalle I.

Remarque : Graphiquement, la fonction f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer sa représentation graphique « sans lever le crayon ».

Exemples : — Les fonctions $x \longrightarrow x^n$ (n entier supérieur ou égal à 1) sont continues sur $\mathbb{R}$.
— La fonction racine carrée $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$
— Les fonctions $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
— Les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ (n entier supérieur ou égal à 1) sont continues sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

1.3 Cas des fonctions dérivables

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
Alors f est continue sur l'intervalle I.

Démonstration :
Soit $a \in I$. f est dérivable en a donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.
On note g la fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ par $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On a donc $\lim_{x\to a} g(x) = f'(a)$.
De plus, $f(x) - f(a) = g(x) \times (x-a)$ d'où $f(x) = f(a) + g(x).(x-a)$.
Or, $\lim_{x\to a} g(x) = f'(a)$ et $\lim_{x\to a}(x-a) = 0$, donc $\lim_{x\to a} g(x).(x-a) = 0$ et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Par suite, la fonction f est continue en a.

Remarque : Attention ! La réciproque de cette propriété est FAUSSE. La fonction racine carrée est continue en zéro mais n'est pas dérivable en zéro.

Conséquences :
1. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.
3. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Les fonctions obtenues par opérations sur les fonctions usuelles (somme, produit, quotient) sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Exercice : 1, 3, 4, 5 page 115 et 62, 63 page 126 [1] – 83 page 130 [2] [TransMath]

2 Théorème des valeurs intermédiaires – Applications

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 : (admis)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, $b \in I$ avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$ (voir figure 3).

Remarque : L'hypothèse de la continuité est *essentielle.*
La fonction de la figure 4 n'est pas continue sur $[0\,;4]$ et, bien que $f(0) = 1$ et $f(4) = 5$, l'équation $f(x) = 2,5$ n'admet aucune solution.

2.2 Cas des fonctions continues strictement monotones

Théorème 2 : Cas des fonctions strictement monotones
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et a, $b \in I$ avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$

1. Continuité d'une fonction.
2. Type BAC.

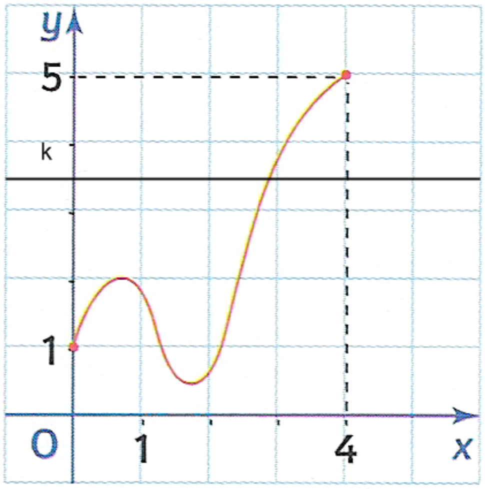

Figure 3 – Équation $f(x) = k$: cas d'une fonction continue

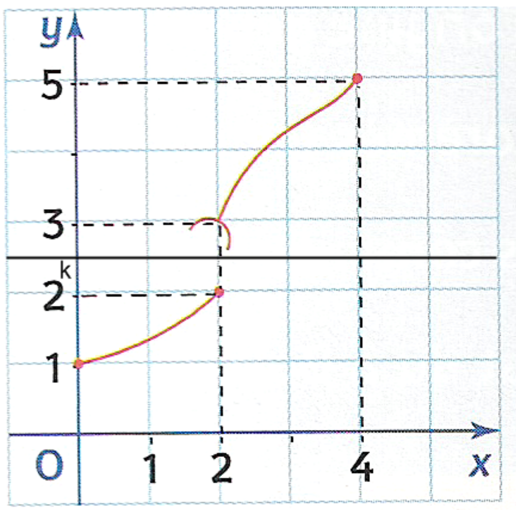

Figure 4 – Équation $f(x) = k$: cas d'une fonction non continue

Démonstration :
L'existence de $c \in [a\,;\,b]$ est assurée par le théorème précédent (car f est continue).
De plus, s'il existe deux solutions c_1 et c_2, on a alors $f(c_1) = f(c_2) = k$.
La fonction f étant *strictement* monotone, on en déduit que $c_1 = c_2$. D'où l'unicité de la solution.

Exemple : Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une solution unique sur $[0\,;\,1]$.
Soit f la fonction définie sur $[0\,,\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
f est continue sur $[0\,;\,1]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.
De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}$ et $2 \in [0\,;\,1]$.
Donc, l'équation $\mathrm{e}^x = 2$ admet une solution unique sur $[0\,.;\,1]$.

Remarques :
1. Il n'est en général pas possible de déterminer de manière exacte cette solution. Par contre, des méthodes (comme la méthode de balayage ou de dichotomie) permettent d'en trouver une valeur approchée (voir exercices).
2. Ces deux théorèmes s'étendent aux cas où l'intervalle d'étude est de la forme $]a\,;\,b[$, $[a\,;\,b[$, $[a\,;+\infty[$, etc. Dans ce cas, pour conclure, il faut étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude pour conclure. Cette utilisation sera vue dans le chapitre « Limites – Asymptotes »

Exercices : 6 page 116 [3] – 87 page 131 [4] [TransMath]

Propriété : Un cas particulier important
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a,\, b \in I$ avec $a < b$.
Si $f(a)\,.f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]a\,;\,b[$.

Exercices : 8, 9 page 117 ; 66 page 126 et 68 page 127 [5] – 72 page 127 [6] – 26 page 120 et 71 page 127 [7] – 86 page 130 et 88, 89 page 131 [8] [TransMath]

3 Compléments de dérivation

3.1 Dérivation d'une fonction composée

Théorème : (admis)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$
Alors la fonction g définie par $g(x) = f(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemple :
1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.
On pose $u(x) = 1 + x^2$ et $f(x) = \sqrt{x}$. On a :
— $g(x) = f(u(x))$
— u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$.
Par suite, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Quelques cas particuliers importants : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
— Pour tout entier naturel n non nul, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
— Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, La fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$.
— Si pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
— La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

3. Cas de fonctions strictement monotones.
4. Vrai-Faux.
5. Détermination d'une valeur approchée de la solution.
6. Algorithme de dichotomie.
7. Avec une fonction auxiliaire.
8. Type BAC.

Exercices : 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 page 118 et 49, 50, 55, 56 page 125 [9] – 42, 44 page 124 et 45, 57, 58 page 125 [10] – 64, 67 page 126 et 70 page 127 [11] [TransMath]

3.2 Application : méthodes classiques de recherche de primitives

Les résultats du tableau 1 s'obtiennent par lecture « inversée » des résultats concernant la dérivation de fonctions composées.
Dans ce tableau, u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f de la forme...	Une primitive F	Commentaires
$u'.u^n$ (avec n entier > 0)	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	—
$\dfrac{u'}{u^n}$ (avec n entier ≥ 2)	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$u'.\mathrm{e}^u$	e^u	—

TABLE 1 – Méthodes classiques de recherche de primitives

Exemples : 1. $f(x) = (2x+1)^5$ sur $I = \mathbb{R}$
f semble de la forme $u'.u^5$ avec $u(x) = 2x+1$ et $u'(x) = 2$.
On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2x+1)^5$$

Une primitive de f sur I est donc :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^6}{6} = \frac{(2x+1)^6}{12}$$

2. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ sur $I = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$
f semble de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-2x$ et $u'(x) = -2$.
On a donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2}{(1-2x)^2}$$

Une primitive de f sur I est donc :

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{1-2x}$$

3. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-3x}}$ sur $I = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right[$
f semble de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1-3x$ et $u'(x) = -3$.
On a donc :

$$f(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{1-3x}}$$

Une primitive de f sur I est donc :

$$F(x) = -\frac{2}{3} \times 2\sqrt{1-3x} = -\frac{4}{3}\sqrt{1-3x}$$

9. Calculs de dérivées.
10. Applications.
11. Théorème des valeurs intermédiaires.

4. $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $I = \mathbb{R}$
   f semble de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\frac{x^2}{2}$ et $u'(x) = -x$.
   On a donc :
   $$f(x) = -3 \times \left(-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
   Une primitive de f sur I est donc :
   $$F(x) = -3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercices : 6, 8, 9, 10 page 201 et 72, 74, 75 page 218 [12] – 23, 24, 25 page 204 et 79, 80, 81, 82 page 218 [13] – 128 page 226 et 143 page 229 [14] [TransMath]

Références

[TransMath] .TransMATH Term S, Programme 2012 (Nathan)

3, 5, 6, 7

12. Recherches classiques de primitives.
13. Calculs d'intégrales.
14. Type BAC.