Forme trigonométrique
d'un nombre complexe – Applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

---

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1.1 Rappels : affixe d'un point

Définition : Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormé direct et z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
- Le point $M\,(a\,;\,b)$ est appelé image de z. (voir figure 1)
- On dit que M a pour affixe z.
- La distance OM est appelée module de z. On note $|z| = OM$.

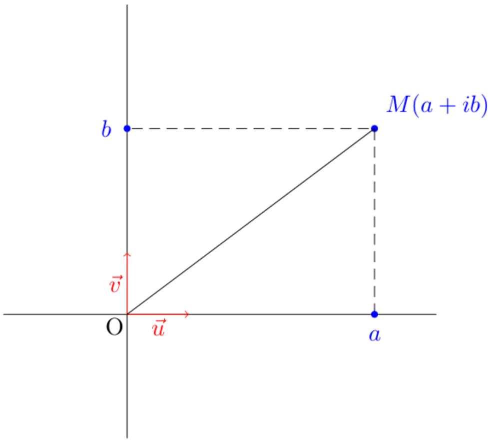

FIGURE 1 – Interprétation géométrique

Conséquences : 1. L'ensemble des nombres réels est représenté par l'axe des abscisses. L'ensemble des imaginaires purs est représenté par l'axe des ordonnés.

2. On a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a :

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

Démonstration :
On note $z = a + ib$ la forme algébrique du complexe z.

$$z\overline{z} = (a+ib)\,(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Propriété : Affixe du milieu d'un segment
Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
On note I le milieu du segment $[AB]$.
Alors, l'affixe de I est :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Exercice : Démontrer cette propriété à l'aide des coordonnées du milieu d'un segment.

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition : Soit $\vec{w}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On appelle affixe de $\vec{w}$ le complexe $z = a + ib$.

Propriété 1 : Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme affixe $z_B - z_A$.

Démonstration :
Si $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ (formes algébriques), alors $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. Par suite, son affixe est :

$$z = (x_B - x_A) + i\,(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

Remarques : Il découle facilement des règle de calcul sur les coordonnées de vecteurs que :

1. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales.
2. Si $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives z et z' et k un réel :
   — l'affixe de $\vec{w} + \vec{w'}$ est $z + z'$;
   — l'affixe de $k\vec{w}$ est kz.
3. On peut donc utiliser les affixes pour déterminer une colinéarité de vecteurs, donc pour déterminer un parallélisme ou un alignement.

Exercices : 66, 67, 70 page 254[1] – 68, 69 page 254[2] [TransMath]

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition : Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z (voir figure 2).

On appelle argument de z toute mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$. On le note $\arg(z)$. il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).
On a donc :

$$\arg(z) = \left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$$

Remarques : 1. Si z est un réel, c'est-à-dire $z = a$:
   — si $a > 0$, $|z| = a$ et $\arg(z) = 0$
   — si $a < 0$, $|z| = -a$ et $\arg(z) = \pi$
2. Si z est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$:
   — si $b > 0$, $|z| = b$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
   — si $b < 0$, $|z| = -b$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

Propriété : Module et argument de l'opposé et du conjugué
Soit z un complexe non nul et M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.
Par des considérations géométriques simples sur la figure 3, on obtient :

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$$
$$\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$$
$$\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)\ [2\pi]$$

1. Affixe d'un point, d'un vecteur.
2. Ensembles de points

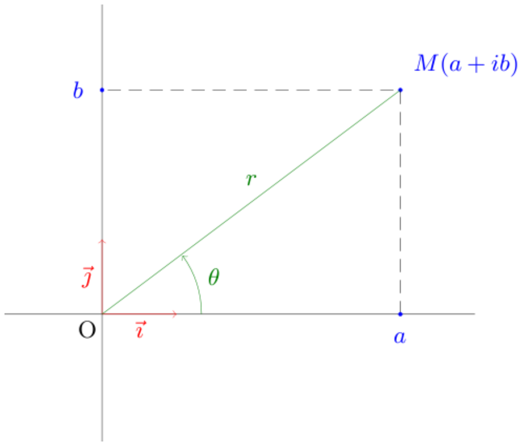

Figure 2 – Argument d'un nombre complexe

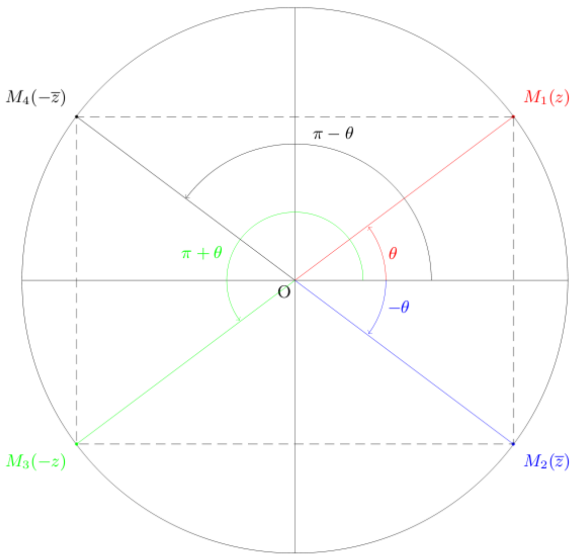

Figure 3 – Module et argument de l'opposé et du conjugué

Exercices : 72, 73, 74 page 254 [3] [TransMath]

2.2 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Théorème – Définition : Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme suivante :

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z)\ [2\pi]$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique du complexe z.

Démonstration :
On note M le point d'affixe z, $r = OM$ et $\theta = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ $[2\pi]$.
La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique en un point A (voir figure 4).
Les coordonnées de A sont $(\cos(\theta)\ ;\ \sin(\theta))$ et, comme $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OA}$, les coordonnées de M sont $(r\cos(\theta)\ ;\ r\sin(\theta))$.
L'affixe de M est donc :

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

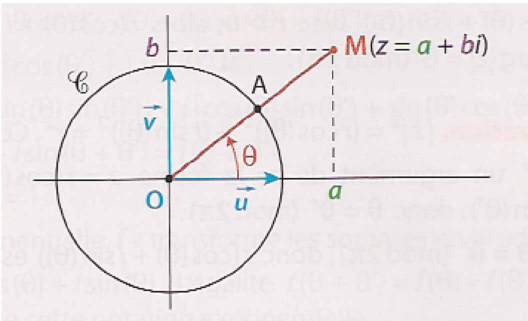

FIGURE 4 – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice : 22 page 244 [4] [TransMath]

Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique : Soit z un complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$ et de forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Alors :

— Si l'on connaît r et θ :

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

— Si l'on connaît a et b :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Exemple : Soit $z = \sqrt{3} - i$.

$$r = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc $\arg(z) = \theta = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

Exercices : 20 page 244 et 77 page 255 [5] – 90 page 256 [6] [TransMath]

3. Argument d'un nombre complexe.
4. Forme trigonométrique d'un complexe non nul.
5. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.
6. Ensembles de points.

2.3 Égalité de deux nombres complexes

Propriété : Égalité de deux complexes

Les complexes $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

Remarque : Attention ! L'hypothèse $r > 0$ est essentielle pour obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exemples : Donner la forme trigonométrique des complexes $z_1 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

— La forme donnée pour z_1 n'est pas une forme trigonométrique : $z_1 = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

On a : $z_1 = 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ avec $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$.

La forme trigonométrique de z_1 est donc : $z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, c'est-à-dire $|z_1| = 3$ et $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

— La forme donnée pour z_2 n'est pas une forme trigonométrique : $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

On a : $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ avec $\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$.

La forme trigonométrique de z_2 est donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, c'est-à-dire $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Exercice : 78 page 255[7] [TransMath]

2.4 Cas d'un produit ou d'un quotient

Propriété : Module et argument d'un produit et d'un quotient

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$$

Démonstration (partielle) :

On note $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ les formes trigonométriques de z et de z'.

On a donc :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \theta\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |z'| = r' \\ \arg(z') = \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \times r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\ &= rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right] \end{aligned}$$

Donc, d'après l'unicité de la forme trigonométrique :

$$\begin{cases} |zz'| = rr' \\ \arg(zz') = \theta + \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

Exercice : En suivant un raisonnement analogue, montrer la deuxième partie de la propriété.

Remarques : 1. Si n est un entier naturel non nul et z un complexe non nul :

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$$

7. Détermination de formes trigonométriques.

2. Si z un complexe non nul :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

Exercices : 76 page 254 ; 79, 80, 81 page 255 [8] – 99, 101 page 257 [9] – [TransMath]

3 Forme exponentielle d'un complexe non nul

Définition : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Remarque : « $\mathrm{e}^{i\theta}$ » se lit « exponentielle de $i\theta$ ».

Exemples : $\mathrm{e}^{i0} = 1$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ $\quad$ $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriété : Soient θ et θ' deux réels.

$$\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i\left(\theta+\theta'\right)} \qquad \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i\left(\theta-\theta'\right)}$$

Remarques :
1. La démonstration de cette propriété est la même que celle du 2.4, en prenant $r = r' = 1$.
2. On retrouve les propriétés « classiques » de l'exponentielle, ce qui justifie en partie la notation.
3. L'exponentielle complexe se manipule comme une puissance, ce qui rend les calculs sur les arguments plus faciles.

Propriété 2 : Formule de Moivre

Soit θ un réel et n un entier naturel. On a :

$$\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

Remarque :
1. C'est une conséquence directe de la **Propriété 1**. Ce résultat se montre par récurrence sur n.
2. On a donc :

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Propriété : Soient θ et θ' deux réels.
$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'}$ équivaut à $\theta = \theta'\ [2\pi]$.

Définition : Tout nombre complexe z non nul, dont un argument est θ, peut s'écrire sous la forme :$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$;
Cette écriture est appelée forme exponentielle du complexe z.

Remarque : En particulier, tous les complexes de module 1 admettent une écriture de la forme $\mathrm{e}^{i\theta}$.

Exercices : 23 page 245 et 83 page 255 [10] – 24 page 245 [11] – 25 page 245et 84, 85, 87 page 255 [12] – 88 page 255 [13] [TransMath]

4 Applications géométriques des nombres complexes

4.1 Distances et angles orientés

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.

1. $AB = |z_B - z_A|$
2. Si $z_A \neq z_B$, $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$

8. Module et argument d'un produit ou d'un quotient.
9. Un ensemble de points.
10. Forme exponentielle.
11. Retrouver le module et l'argument.
12. Produits et quotients.
13. Retrouver les formules de trigonométrie.

Démonstration :
On supposera que A et B ne sont pas confondus (c'est-à-dire $z_A \neq z_B$). Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. L'affixe de M est $z_B - z_A$.

Par définition de la forme trigonométrique des nombres complexes, on a : $\begin{cases} OM = |z_B - z_A| \\ \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) \end{cases}$.

Par suite : $AB = OM = |z_B - z_A|$ et $\left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)$.

Exercices : 26, 27 page 246 et 91, 92 page 256 [14] – 89 page 256 [15] – 28 page 246 et 111 page 260 [16] [TransMath]

4.2 Caractérisation des cercles et des médiatrices

> **Propriété 1 :** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R.
> Le point M d'affixe z est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $|z - \omega| = R$.

Démonstration :

$$M \in \mathcal{C} \iff \Omega M = R \iff |z - \omega| = R$$

Remarque : $|z - \omega| = R$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z - \omega = Re^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = \omega + Re^{i\theta}$.

> **Propriété 2 :** Équation paramétrique complexe d'un cercle
> Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R.
> Le point M d'affixe z est sur le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \omega + Re^{i\theta}$.

> **Propriété 3 :** Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b. On note Δ la médiatrice de $[AB]$.
> Le point M d'affixe z est sur Δ si et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

Démonstration :

$$M \in \Delta \iff M \text{ équisistant de } A \text{ et de } B \iff AM = BM \iff |z - a| = |z - b|$$

Exercices : 93, 94, 96, 97 page 256 [17] – 109, 110 page 260 [18] [TransMath]

4.3 Pour aller plus loin...

Module : Exercice 38 page 251 [19] [TransMath]

> **Théorème :** Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
> Si $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$:
> $$\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Démonstration :
Si C et D ne sont pas confondus (c'est-à-dire $z_C \neq z_D$) :

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \arg\left(z_D - z_C\right) - \arg\left(z_B - z_A\right) \\
&= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)
\end{aligned}$$

14. Nature de polygones.
15. Points alignés.
16. Application géométrique des nombres complexes.
17. Ensembles de points.
18. Type BAC.
19. Utiliser l'affixe d'un vecteur.

Remarques : 1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0\ [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ réel).

2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (c'est-à-dire $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ imaginaire pur).

Un cas particulier important : Si A, B et M sont trois points distincts d'affixes respectives a, b et z, alors $\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right)$. Or, $\frac{b-z}{a-z}=\frac{z-b}{z-a}$ donc :

$$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

Remarque : Cette relation est utilisée pour déterminer des ensembles de points.

Applications : Triangles particuliers

Dans la suite, A, B et C désignent trois points d'abscisses respectives z_A, z_B et z_C.

1. *Triangle rectangle rectangle isocèle direct* (voir figure 5)

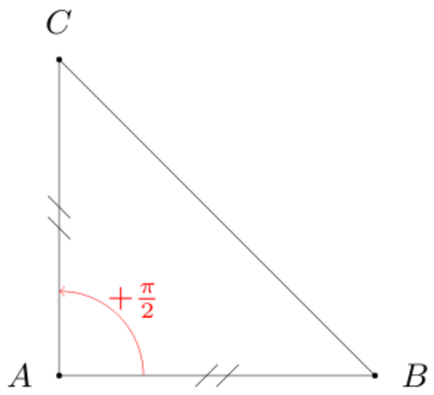

FIGURE 5 – Triangle rectangle isocèle direct

$$ABC \text{ triangle rectangle isocèle direct en } A \iff \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$$

2. *Triangle équilatéral* (voir figure 6)

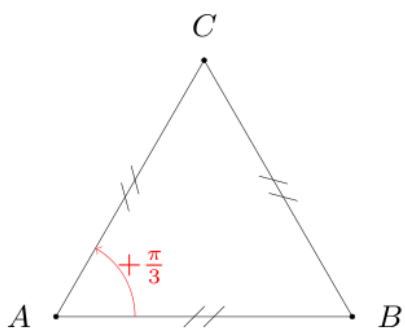

FIGURE 6 – Triangle équilatéral

$$ABC \text{ triangle équilatéral direct} \iff \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exercices : 102 page 257[20] – 123 page 263[21] [TransMath]

20. Restitution organisée des connaissances.
21. Nombres complexes et géométrie.

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

3, 5, 6, 7, 8, 9