La fonction logarithme népérien

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

---

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition – Courbe représentative

Propriété : Pour tout $x > 0$, l'équation $\mathrm{e}^t = x$ (d'inconnue t) admet une unique solution.
Cette solution est appelée logarithme népérien de x et est notée $\ln x$.

Démonstration :
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, il existe une unique solution à l'équation $\mathrm{e}^t = x$.

Exemples : 1. Comme $\mathrm{e}^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

2. Comme $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\ln \mathrm{e} = 1$.

Définition : La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ qui, à tout $x > 0$ associe $\ln x$, c'est-à-dire l'unique réel dont l'exponentielle est x.

Théorème : Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y = \ln x \iff x = \mathrm{e}^y$$

Démonstration :
Si $y = \ln x$, alors, par définition, y est l'unique réel dont l'exponentielle est x, d'où : $\mathrm{e}^y = x$.
Réciproquement, si $x = \mathrm{e}^y$, $\ln x = \ln(\mathrm{e}^y)$, c'est donc l'unique réel dont l'exponentielle est e^y. Cet unique réel ne peut être que y. On a donc : $\ln x = y$.

Remarques : 1. En particulier, on a montré que :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

2. On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des fonctions réciproques. Leurs courbes sont alors symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir figure 1).

3. Grâce à la courbe représentative de la fonction logarithme, on peut conjecturer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$$

On admettra provisoirement ce résultat, qui sera montré dans un cadre plus général dans le chapitre « Limites – Asymptotes ».

Exercices : 45 page 155 [1] – 44, 46 page 155 [2] [TransMath]

1.2 Sens de variation – Application

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :
Soient a et b deux réels strictement positifs, avec $a < b$.
Comme $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln b}$, on a : $\mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$ et, par suite, $\ln a < \ln b$.
La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Ensembles de définition.
2. Simplification d'écriture.

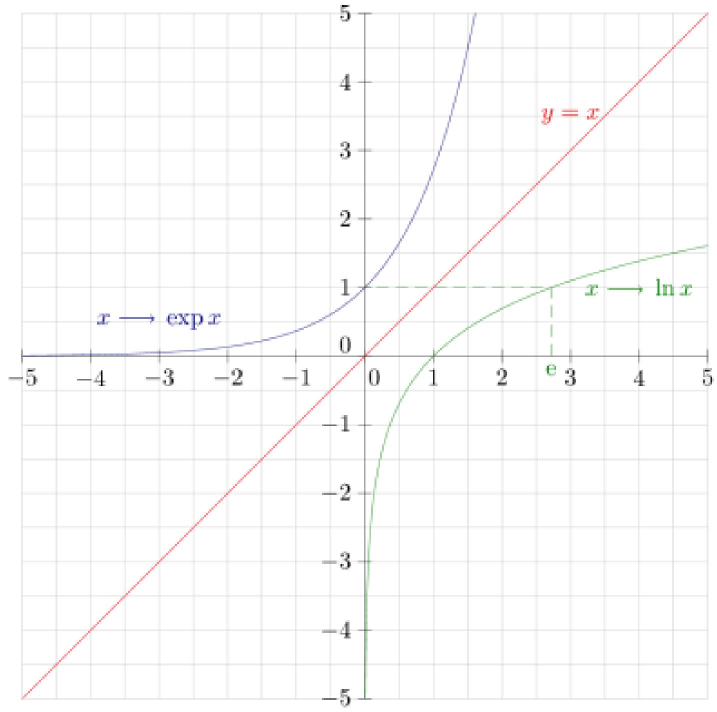

FIGURE 1 – Fonctions réciproques : ln et exp

Conséquences : 1. Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$:

— $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$.
— $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.

2. Pour tout $x > 0$:

— $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.
— $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$.
— $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$.

Remarque : La première partie de cette propriété permet de résoudre des équations ou inéquations comportant des logarithmes. La deuxième partie donne le signe de $\ln x$.

Exemples : Résolution d'équations et d'inéquations

1. Résoudre l'équation $\ln(5 - 2x) = 1$:
   Il faut que $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.
   Cette équation équivaut à $\ln(5 - 2x) = \ln \mathrm{e}$. On en déduit que $5 - 2x = \mathrm{e}$, c'est-à-dire $x = \frac{5-\mathrm{e}}{2}$.
   Cette valeur est bien dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$ donc $S = \left\{\frac{5-\mathrm{e}}{2}\right\}$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(5 - 2x) < 1$:
   Il faut que $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.
   Cette équation équivaut à $\ln(5 - 2x) < \ln \mathrm{e}$. On en déduit que $5 - 2x < \mathrm{e}$, c'est-à-dire $x > \frac{5-\mathrm{e}}{2}$.
   Comme de plus on doit avoir $x \in \left]-\infty\,;\,\frac{5}{2}\right[$, on a $S = \left]\frac{5-\mathrm{e}}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right[$.
3. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{x+2} = 5$:
   Cette équation équivaut à $x + 2 = \ln 5$, c'est-à-dire $x = -2 + \ln 5$.
   On a donc $S = \{-2 + \ln 5\}$.

Exercices : 15, 17, 18 page 146 et 47, 48, 49, 50, 51, 52, 57, 58 page 155 [3] [TransMath]

3. Équations et inéquations comportant logarithmes et/ou exponentielles.

1.3 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 1 : Propriété fondamentale
Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration :
$e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a}e^{\ln b} = ab$.
On a donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$ et, donc, $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Théorème 2 : Soient a, b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Démonstration :
1. D'après le théorème 1 : $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$.
De plus, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ d'où $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.
2. D'après le théorème 1 : $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
3. Le résultat se montre aisément par récurrence pour $n \geq 0$.
Pour $n < 0$, il suffit d'utiliser le résultat du 2. pour conclure.
4. $\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = \ln a$ et, d'après 3. ,$\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = 2\ln\sqrt{a}$. On obtient donc $2\ln\sqrt{a} = \ln a$, soit $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Remarque : Ce théorème est souvent utilisé pour simplifier des expressions ou pour résoudre des équations ou inéquations (voir exercices). La partie 3. du théorème 2 peut aussi être utilisée pour des suites géométriques.

Exercice : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.
A partir de quel indice n a-t-on $u_n \leq 10^{-3}$?

On a $u_n = u_0 \times q^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$. On doit donc résoudre l'inéquation $\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$.
Comme tous les nombres sont strictement positifs, cette équation est équivalente à $\ln\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \ln 10^{-3}$, c'est-à-dire : $n \ln \frac{4}{5} \leq -3\ln 10$.
Comme de plus $\frac{4}{5} < 1$, $\ln \frac{4}{5} < 0$ donc on obtient $n \geq \frac{-3\ln 10}{\ln \frac{4}{5}}$.
A la calculatrice, on trouve que $\frac{-3\ln 10}{\ln \frac{4}{5}} \simeq 30,96$ donc, le plus petit indice est $n = 31$.

Exercices : 1, 2, 3, ,4 page 143 et 53 page 155 [4] – 55, 56 page 155 [5] – 5, 6, 7 page 143 [6] – 20, 21 page 147 ; 31 page 150 et 54 page 155 [7] – 76, 79, 80 page 159 [8] [TransMath]

2 Dérivation, primitives

2.1 Dérivée de la fonction ln

Propriété (admise) : La fonction ln est continue sur $]0\,;+\infty[$.

4. Simplification d'expressions.
5. Résolutions d'équations et d'inéquations.
6. Positions relatives de courbes.
7. Application aux suites géométriques.
8. Fonction ln et suites.

Théorème : La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

Démonstration :
Soit $a>0$ et $x>0$.
Le taux d'accroissement de la fonction ln en a est $t(x)=\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$.
On pose $X=\ln x$ et $b=\ln a$. On a : $x=\mathrm{e}^{\ln x}=\mathrm{e}^X$ et $a=\mathrm{e}^{\ln a}=\mathrm{e}^b$.
Par suite, $t(x)=\frac{X-b}{\mathrm{e}^X-\mathrm{e}^b}$. Il faut maintenant déterminer $\lim_{x\to a} t(x)$.
Comme la fonction ln est continue en a : $\lim_{x\to a} X=\lim_{x\to a}\ln x=\ln a=b$.
De plus, comme la fonction exponentielle est dérivable en b, on a :

$$\lim_{X\to b}\frac{\mathrm{e}^X-\mathrm{e}^b}{X-b}=\exp'(b)=\mathrm{e}^b=a$$

et, par suite : $\lim_{x\to a} t(x)=\frac{1}{a}$.
La fonction ln est donc dérivable en a et $\ln'(a)=\frac{1}{a}$.

Exercices : 63 ,65 page 156 et 66, 67, 68 page 157 [9] – 69 page 157 [10] – 11, 12 page 145 ; 32 page 150 et 90 page 163 [11] – 14 page 145 ; 77, 78 page 159 ; 88 page 162 et 102 page 165 [12] [TransMath]

2.2 Primitives de la fonction $x \to \frac{1}{x}$

Propriété : Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est $F(x)=\ln x$.

Exercices : 1 page 200 ; 15 page 202 ; 61 page 217 ; 21, 26 page 204 ; 29 page 205 ; 85 page 218 ; 107 page 221 ; 113 page 22 [13] – 129 page 226 [14] [TransMath]

2.3 Dérivée de $\ln u$, où u est une fonction

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=\ln[u(x)]$ est dérivable sur I et :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarques :
1. C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.
2. En particulier, comme $u(x)$ est strictement positive, f' est du même signe que u' .
3. On trouve des résultats analogues sur les limites en utilisant le théorème de limite de fonctions composées.

Exercices : 25, 26 page 148 [15] – 72 page 158 [16] – 74, 75 page 158 et 92 page 163 [17] – 91, 94 page 163 [18] – 97, 98 page 164 et 101 page 165 [19] – 114 page 222 [20] [TransMath]

9. Étude de fonctions.
10. Détermination de fonctions.
11. Tangentes.
12. Fonction ln et suites.
13. Primitives, intégrales.
14. Type BAC.
15. Étude de fonctions.
16. Détermination de fonction.
17. Vrai/Faux.
18. Type BAC.
19. Fonction ln et suites.
20. Suites et intégrales.

2.4 Primitives de $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ est :

$$F(x) = \ln(u(x))$$

Remarque : Attention à ne pas oublier l'hypothèse $u > 0$!

Exemple : $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ sur $I =]1\,;\,+\infty[$

f semble de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$.
De plus, sur $]1\,;\,+\infty[$, $u(x) > 0$.
On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1}$$

Une primitive de f sur I est donc :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) = \ln\sqrt{x^2-1}$$

Exercices : 10 page 201 et 76 page 218 [21] – 28 page 204 ; 83 page 218 ; 87, 88 page 219 ; 134 page 228 [22] – 141, 143 page 229 [23] [TransMath]

3 Limites et fonction logarithme

3.1 Limites de la fonction logarithme néperien

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Démonstration :
Il s'agit de montrer que, pour tout $M > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que, si $x > x_0$, $\ln x > M$.
Or $\ln x > M \iff x > e^M$ donc, en posant $x_0 = e^M$, on obtient le résultat voulu.
Par suite, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
Pour la limite en 0^+, on pose $X = \frac{1}{x}$. On a alors :

$$\ln x = -\ln\frac{1}{x} = -\ln X$$

Or, $\lim_{x\to 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Exercices : 59 page 156 [24] – 93 page 163 [25] [TransMath]

3.2 Des limites importantes

Théorème 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$$

21. Détermination de primitives.
22. Calcul d'intégrales.
23. Plus difficiles.
24. Calcul de limites.
25. Étude de fonctions.

Démonstration :
On pose $X = \ln x$. On a alors $x = \mathrm{e}^X$ et $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{\mathrm{e}^X}$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$.
On pose ensuite $X = \frac{1}{x}$. On a alors $x = \frac{1}{X}$ et $x \ln x = \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln X}{X}$.
De plus, $\lim_{x\to 0^+} X = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0^+$ donc $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-$.

Remarque : On peut montrer de même que, pour tout $n \geq 2$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Théorème 2 :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration :
$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$; c'est donc le taux d'accroissement de la fonction ln en 1. Or, la fonction ln est dérivable en 1 donc :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Le deuxième résultat se trouve facilement à l'aide du changement de variable $X = 1 + x$.

Exercices : 60, 61 page 156 [26] – 62 page 156 [27] – 22, 23 page 147 [28] – 13 page 145 [29] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

2, 3, 4, 5, 6, 7

26. Calcul de limites.
27. Dérivabilité d'une fonction.
28. Fonction ln et suites.
29. Une autre démonstration de la limite de $\frac{\ln x}{x}$.