Représentation paramétrique
de droites, de plans
Applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1 Représentations paramétriques d'une droite de l'Espace

1.1 Définition

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'Espace.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\ (x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur *directeur* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Définition : On appelle représentation paramétrique ou système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ par un point $A\ (x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le système :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Le réel t est appelé paramètre.

Remarques :
1. Un point M est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées de M vérifie le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
2. Réciproquement, si la droite Δ admet comme équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$, cette droite passe par le point $M_0\ (x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
3. Pour obtenir une représentation paramétrique du segment $[AB]$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre $t \in [0\,;\,1]$.
4. Pour obtenir une représentation paramétrique de la demi-droite $[AB)$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre $t \in [0\,;\,+\infty[$.

Exercices : 16, 18, 19 page 299 et 86, 87 page 310 [1] – 107 page 314 [2] – 115 page 316 [3] – 119, 120, 121 page 316 [4] [TransMath]

1.2 Intersection de deux droites

Les résultats concernant les positions relatives de deux droites de l'Espace sont rappelées dans le tableau 1.

Remarque : $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et Δ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires :
  - Si $\mathcal{D}$ et Δ n'ont pas de point commun, elles sont strictement parallèles ;
  - Si $\mathcal{D}$ et Δ ont un point commun, elles sont confondues.

1. Représentation paramétrique d'une droite.
2. Type BAC.
3. Points équidistants de trois points.
4. Segments, demi-droites.

— Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires :
  — Si $\mathcal{D}$ et Δ n'ont pas de point commun, elles sont non coplanaires ;
  — Si $\mathcal{D}$ et Δ ont un point commun, elles sont sécantes.

Exercice résolu : Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'Espace, on considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -6t + 8 \\ y = -12t + 1 \\ z = 9t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}_3 : \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ puis de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{u}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont *parallèles.*
Reste à déterminer si les deux droites sont *strictement parallèles* ou *confondues.*
Le point $A\,(-1\,;\,0\,;5)$ est un point de $\mathcal{D}_1$.

$$A \in \mathcal{D}_2 \iff \begin{cases} -6t + 8 = -1 \\ -12t + 1 = 0 \\ 9t - 2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{12} \\ t = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Ce qui est impossible. Par suite, $A \notin \mathcal{D}_2$.
Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc *strictement parallèles.*

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$: Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$ est $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont soit *sécantes*, soit *non coplanaires.*
On va donc chercher un éventuel point d'intersection à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.

$$M\;(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \iff \text{il existe deux réels } t \text{ et } s \text{ tels que } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = s + 6 \\ y = 3s - 1 \\ z = -2s + 2 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} -1 + 2t = s + 6 \\ 4t = 3s - 1 \\ 5 - 3t = -2s + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2t - 7 \\ 4t = 3\,(2t - 7) - 1 \\ 5 - 3t = -2\,(2t - 7) + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2t - 7 \\ 4t = 6t - 22 \\ 5 - 3t = -4t + 16 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 15 \\ t = 11 \\ t = 11 \end{cases}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont donc *sécantes* et leur point d'intersection a comme coordonnées :

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \times 11 = 21 \\ y = 4 \times 11 = 44 \\ z = 5 - 3 \times 11 = -28 \end{cases}$$

Remarques : 1. Attention ! Lors de la recherche d'un éventuel point d'intersection entre deux droites, il faut *absolument* donner deux noms différents aux deux paramètres.

2. Si les droites avaient été non coplanaires, on aurait, lors de la résolution du système, trouvé deux valeurs différentes pour t (ou s), ce qui est impossible.

Exercices : 20, 21, 22, 23 page 300 ; 90 page 310 et 92, 93 page 311 [5] – 108, 109 page 314 [6] [TransMath]

2 Représentation paramétrique d'un plan de l'Espace

Un plan $\mathcal{P}$ est caractérisé par la donnée d'un point $A\ (x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et de deux vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires.

$$\begin{aligned}
M\ (x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM},\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ coplanaires} \\
&\iff \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}, \text{ avec } t, t' \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} x - x_0 = at + a't' \\ y - y_0 = bt + b't' \\ z - z_0 = ct + c't' \end{cases},\ t, t' \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases},\ t, t' \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Le système obtenu est appelé représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

On peut utiliser cette représentation paramétrique pour étudier les positions relatives d'une droite et d'un plan (voir tableau 2) ou de deux plans (voir tableau 3).

Remarque : Il existe un moyen plus simple d'étudier ces positions relatives. il sera vu dans le chapitre « Orthogonalité, produit scalaire » et fait intervenir les équations de plans.

Exercices : 94, 95, 96, 97 page 311[TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S, Programme 2012 (Nathan)

2, 4

5. Positions relatives de deux droites.
6. Type BAC.

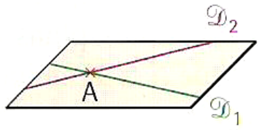
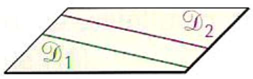
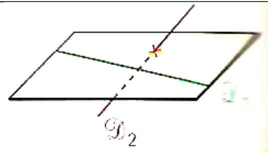
Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$			
Coplanaires			**Non coplanaires**
sécantes	**strictement parallèles**	**confondues**	
			
un point commun unique	pas de point commun	tous les points sont communs	il n'existe pas de plan contenant les deux droites

TABLE 1 – Positions relatives de deux droites

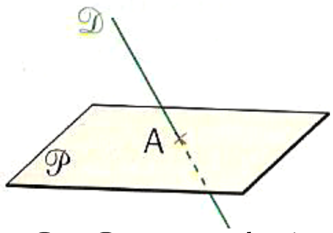
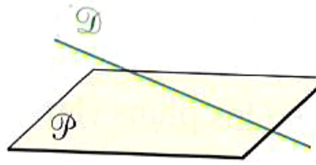
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$		
sécants	**parallèles**	
		
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun	$\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

TABLE 2 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

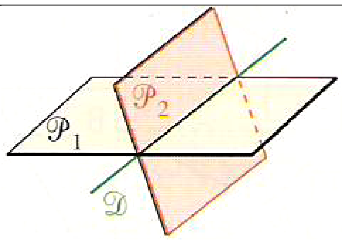
Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$		
sécants	**parallèles**	
	confondus	**strictement parallèles** ou **disjoints**
		
leur intersection est la droite $\mathcal{D}$	leur intersection est un plan	leur intersection est vide

TABLE 3 – Positions relatives de deux plans