Lois de probabilités
à densité

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Activité : L'infatigable MESSI (sur fp)

1 Lois de probabilités à densité

1.1 Deux exemples pour comprendre

Exemple 1 : Soit X la variable aléatoire mesurant la durée exacte du temps d'attente aux urgences d'un hôpital. On suppose que ce temps d'attente est toujours inférieur à 3 heures.

La variable aléatoire X peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[0\,;\,3]$. On ne peut donc pas énumérer les possibilités sous la forme $X = x_i$. On dit que la loi de probabilité de X est continue.

Le calcul de la probabilité que le temps d'attente soit exactement de 2 h 31 mn est ici complètement inutile [1]. Il serait par contre intéressant de déterminer la probabilité que ce temps d'attente soit compris entre 1 et 2 heures (ce que l'on notera $P(X \in [1\,;\,2])$) ou bien soit inférieure à une heure et demi (ce que l'on notera $P(X \leq 1{,}5)$).

Exemple 2 : On considère la variable aléatoire X donnant la durée de vie d'un appareil électrique en années. On a encore une loi de probabilité continue avec $X \in [0\,;\,+\infty[$.
Il serait intéressant de connaître la probabilité qu'un appareil ait une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans (ce que l'on notera $P(X \geq 10)$) ou bien, sachant qu'il a déjà fonctionné dix ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans de plus (ce que l'on notera $P_{X\geq 10}(X \geq 15)$)

1.2 Densité de probabilité

Définition 1 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur J. On dit que f est une densité de probabilité sur I si :

1. f est continue sur I sauf peut-être en quelques points.
2. f est positive sur I
3. $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Définition 2 : Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que X est une variable aléatoire sur I de loi de probabilité P admettant f comme densité de probabilité si :

$$\text{Pour tout intervalle } J \text{ inclus dans } I,\ P(X \in J) = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarques : 1. En particulier, si $J = [a\,;\,b]$, $p(X \in [a\,;\,b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

2. Comme f est une fonction positive, la probabilité $P(X \in I)$ est donc l'aire sous la courbe sur l'intervalle I.

Propriété : Soit X une variable aléatoire sur un intervalle I de loi de probabilité P admettant une fonction f comme densité de probabilité.
Pour tout $a \in I$, $p(X = a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Remarque : On a donc par exemple $P(X \leq a) = P(X < a)$ car $P(X \leq a) = p(X < a) + P(X = a)$ et $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.

Exercices : 29, 30, 31 page 394 et 33 page 395 [2] [TransMath]

1. On verra d'ailleurs par la suite que cette probabilité est nulle.
2. Premières densités de probabilité.

1.3 Espérance d'une loi à densité

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f sur un intervalle I.
L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \int_I x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarques :

1. Dans le cas d'une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, la formule de l'espérance était :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

La définition précédente est cohérente avec ce résultat, en remplaçant la somme $\sum_{i=1}^{n}$ par l'intégrale $\int_I$.

2. Comme pour les lois de probabilité vues en Première, lors de la répétition, un grand nombre de fois, de l'expérience dans les même conditions, la moyenne des valeurs obtenues par X se rapproche de l'espérance mathématique de X.

2 Loi uniforme

2.1 Définition, exemple

Propriété : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f la fonction définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Alors f est une densité de probabilité sur $[a\,;\,b]$. (voir figure 1)

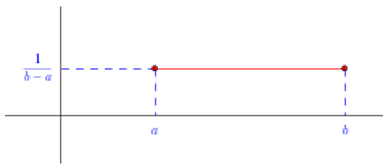

FIGURE 1 – Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

Démonstration :
f est continue sur $[a\,;\,b]$ et est clairement positive.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$

Définition : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire.
On dit que X suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ lorsque X admet comme densité de probabilité la fonction f définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Remarque : C'est la variable aléatoire qui correspond au tirage au hasard d'un nombre dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

Exemple : On reprend l'exemple 1 du 1.1 et on suppose que le temps d'attente au urgences de cet hôpital suit la loi uniforme sur $[0\,;\,3]$. On a alors :

$$P\left(X \in [1\,;\,2]\right) = \int_1^2 \frac{1}{3-0}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(X \leq 1,5\right) = \int_0^{1,5} \frac{1}{3}\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{3}\right]_0^{1,5} = \frac{1,5}{3} = \frac{1}{2}$$

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ et si $a \leq \alpha < \beta \leq b$ alors :

$$p\left(X \in [\alpha\,;\,\beta]\right) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Démonstration :
$P\left(X \in [\alpha\,;\,\beta]\right) = \int_\alpha^\beta f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$

Remarques :
1. On a donc, si Xsuit la loi uniforme sur l'intervalle I et si J est un intervalle inclus dans I :
$$P\left(X \in J\right) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$
2. Si J et K sont deux intervalles de même longueur, on a $P\left(X \in J\right) = P\left(X \in K\right)$. D'où le nom de loi uniforme.

Exercices : 2, 3 page 384 ; 15 page 388 ; 36, 39, 40 page 395 [3] [TransMath]

2.2 Espérance d'une loi uniforme

On rappelle le résultat vu au 1.3 :

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[a\,;\,b]$.
L'espérance mathématique de X est le nombre $E\left(X\right)$ défini par :

$$E\left(X\right) = \int_a^b x f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Dans le cas de la loi uniforme, on obtient le résultat suivant :

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$. Alors :

$$E\left(X\right) = \frac{a+b}{2}$$

Démonstration :
$E\left(X\right) = \int_a^b x f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2}{2} - \frac{1}{b-a} \times \frac{a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

3 Lois exponentielles

3.1 Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Propriété : Sot λ un nombre strictement positif et f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f\left(x\right) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Alors f est une densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Lois uniformes.

Démonstration :
f est continue sur $[a\,;\,b]$ et est clairement positive.
$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-\lambda a}+1$
Comme $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda a} = 0$, on a bien $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Définition : Soient λ un nombre strictement positif et X une variable aléatoire.
On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque X admet comme densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et si $0 \leq a \leq b$ alors :

$$\begin{array}{rcl} P(X \leq a) & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda a} \\ P(X \geq a) & = & \mathrm{e}^{-\lambda a} \\ P(a \leq X \leq b) & = & \mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b} \end{array}$$

Démonstration :
$P(X \leq a) = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a = -\mathrm{e}^{-\lambda a}+1 = 1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
$P(X \geq a) = 1-P(X \leq a) = 1-\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda a}\right) = 1-1+\mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-\lambda a}$
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b = -\mathrm{e}^{-\lambda b}+\mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-\lambda a}-\mathrm{e}^{-\lambda b}$

Exemple : On reprend l'exemple 2 du 1.1 et on suppose que la durée de vie de cet appareil suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$. On a alors

$$P(X \geq 10) = \mathrm{e}^{-0,07\times 10} = \mathrm{e}^{-0,7} \simeq 0,497$$

Exercices 6, 8, 10 page 386 ; 17 page 388 ; 49, 50 page 397 [4] – 58 page 400 [5] [TransMath]
module : TP 21 page 391 [6] [TransMath]

3.2 Loi de durée de vie sans vieillissement

Définition : Une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi sans vieillissement (ou sans mémoire) si, pour tous nombres positifs t et h :

$$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

Remarque : pour un composant électronique, cela signifie par exemple que la probabilité qu'il fonctionne h années supplémentaires sachant qu'il a déjà fonctionné t ans est égale à la probabilité qu'il fonctionne h ans (depuis le départ).
Le composant fonctionne « sans mémoire » des t années écoulées.

Propriété : Soit X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.
Alors X est sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tous nombres positifs t et h :

$$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

Démonstration :

$$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = \frac{P((X \geq t+h)\cap(X \geq t))}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda t-\lambda h+\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$

4. Lois exponentielles.
5. Type BAC.
6. Montage en série ou en parallèle ?

Remarque : On admettra que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que les seules lois sans vieillissement sont les lois exponentielles.

Exemple : On reprend l'exemple 2 du 1.1 et on suppose que la durée de vie de cet appareil suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$. On a alors

$$P_{X\geq 10}(X \geq 15) = P(X \geq 5) = \mathrm{e}^{-0,07\times 5} = \mathrm{e}^{-0,35} \simeq 0,705$$

Exercices : 7, 9 page 386 [7] – 56, 59 page 400 et 60 page 401 [8] [TransMath]

Module : TP 22 page 392 [9] [TransMath]

3.3 Espérance mathématique

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f sur $[0\,;+\infty[$.
L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (exigible) :
Il faut d'abord calculer $I(a) = \int_0^a \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
On note $g(x) = \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$. g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$g'(x) = \lambda \times \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda x \times \left(-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda g(x)$$

On a alors :

$$\lambda g(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - g'(x)$$

donc :

$$g(x) = \frac{1}{\lambda}\left[\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - g'(x)\right]$$

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \frac{1}{\lambda}\left(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - g'(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^a \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda}\int_0^a g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{\lambda}\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a - \frac{1}{\lambda}\left[g(x)\right]_0^a \\
&= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(a\mathrm{e}^{-\lambda a} - 0\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a} + a\mathrm{e}^{-\lambda a}\right)
\end{aligned}$$

Reste à déterminer la limite en $+\infty$ de $I(a)$. On a $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda a} = 0$.
Pour déterminer $\lim_{a\to+\infty} a\mathrm{e}^{-\lambda a}$, on pose $Y = -\lambda a$.
On a alors : $a\mathrm{e}^{-\lambda a} = -\frac{1}{\lambda}\left(-\lambda a\mathrm{e}^{-\lambda a}\right) = -\frac{1}{\lambda}Y\mathrm{e}^{Y}$. Or, $\lim_{a\to+\infty} Y = -\infty$ et $\lim_{Y\to-\infty} Y\mathrm{e}^{Y} = 0$.
On a donc $\lim_{a\to+\infty} a\mathrm{e}^{-\lambda a} = 0$ et $\lim_{a\to+\infty} I(a) = \frac{1}{\lambda}$

Exercices : 5 page 386 ; 48 page 397 [10] – 57 page 400 [11] [TransMath]

7. Loi sans vieillissement.
8. Type BAC.
9. Désintégration radioactive.
10. Espérance d'une loi exponentielle.
11. Type BAC.

Références

[TransMath] TransMATH Term S, Programme 2012 (Nathan)

2, 4, 5, 6