Produit scalaire
dans l'Espace

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

---

1 Orthogonalité dans l'espace

1.1 Droites orthogonales

Définition : Dans l'Espace, on dit que deux droites sont orthogonales s'il existe un point I tels que les parallèles à ces droites passant par I soient perpendiculaires.

Remarque : Attention ! Dans l'Espace, des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et n'ont donc pas nécessairement de point d'intersection. Il faut bien faire la distinction entre des droites orthogonales et des droites perpendiculaires (qui ont, elles un point d'intersection).

Propriété : (admise) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

1.2 Droites perpendiculaires à un plan

Activité : Perpendicularité ou orthogonalité ? (sur feuille polycopiée)

Définition : Soit A le point d'intersection d'une droite Δ et d'un plan $\mathcal{P}$.
On dit que la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$ passant par A (voir figure 1).

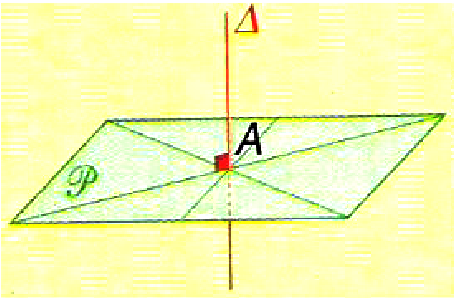


FIGURE 1 – Définition de l'orthogonalité

Théorème : (admis) (aussi appelé « théorème de la porte »)
Si une droite Δ est perpendiculaire en A à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est perpendiculaire à ce plan (voir figure 2).

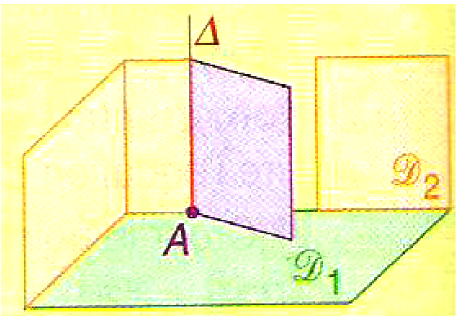


FIGURE 2 – Théorème de la porte

Remarque : On a aussi les deux résultats suivants :
— Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.
— Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, ils sont parallèles.

Exercices : 7, 8 page 272 ; 36 page 379 et 40 page 280 [1] – 14 page 274 ; 37 page 279 ; 40, 42, 43 page 280 ; 55, 57 page 284 et 60, 62 page 285 [2] – 51 page 283 [3] – 52, 54 page 283 [4]

2 Rappels sur le produit scalaire du plan

2.1 Différentes expressions du produit scalaire

— *Forme triangulaire* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$

— *Expression trigonométrique* : Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

— *Expression dans un repère orthonormé* : Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

2.2 Règles de calcul sur le produit scalaire

— *Commutativité* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

— *Bilinéarité* :

1. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
2. $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

— *Carré scalaire* : $\overrightarrow{u}^{\,2} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

— *Identités remarquables* :

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^{\,2} + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^{\,2} - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^{\,2} - \overrightarrow{v}^{\,2} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

2.3 Produit scalaire et orthogonalité

— Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

— Soit $(O ; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Exercices : 1, 2, 3, 4, 5 page 319 [5] [TransMath]

3 Produit scalaire de l'Espace

3.1 Extension de la définition à l'Espace

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'Espace.
Il existe trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe toujours un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.
On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'Espace le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarques : 1. On a alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$$

Cette égalité est bien *indépendante* du plan $\mathcal{P}$ choisi.

1. Orthogonalité de droites et de plans.
2. Calculs de distances, aires et volumes.
3. QCM.
4. Type BAC.
5. Vrai/Faux.

2. Quitte à se placer dans le plan $\mathcal{P}$, les différentes expressions du produit scalaire (sauf l'expression dans un repère du plan) du 2 restent valables.
3. Les règles de calcul sur le produit scalaire (bilinéarité, carré scalaire, identités remarquables) restent les mêmes que dans le plan.

Exercices : 44, 45, 47 page 338 [6] – 43 page 338 [7] [TransMath]

3.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété : On se place dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé de l'Espace.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration :
On a :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\,.\,\vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2xx'+2yy'+2zz'\right] = xx'+yy'+zz'
\end{aligned}$$

Remarque : On retrouve en particulier les deux résultats suivants, valables dans un repère orthonormé de l'Espace :

— Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+z^2$.

— Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^{\,2}} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Exercices : 1, 2 page 325 et 41 page 338 [8] – 28 page 332 [9] [TransMath]

4 Orthogonalité dans l'Espace

4.1 Vecteurs orthogonaux

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'Espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Remarque : On conviendra que le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs de l'Espace.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'Espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.

En particulier, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ orthonormé de l'Espace :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'+zz' = 0$.

6. Calculs de produits scalaires dans l'Espace.
7. Utilisation des règles de calcul du produit scalaire.
8. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé.
9. Valeur maximale d'un angle.

Remarque : Ce n'est qu'une utilisation de la forme trigonométrique du produit scalaire dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exercices : 49, 50, 52, 53 page 339 [10] [TransMath]

4.2 Vecteur normal à un plan – Applications

Définition : On dit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est normal au plan $\mathcal{P}$ si sa direction est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Remarque : Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
On admettra que tout plan admet des vecteurs normaux. On va maintenant pouvoir prouver le théorème de la porte, vue dans le 1.2.

Théorème : (aussi appelé « théorème de la porte »)
Si une droite Δ est perpendiculaire en A à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan (voir figure 3).

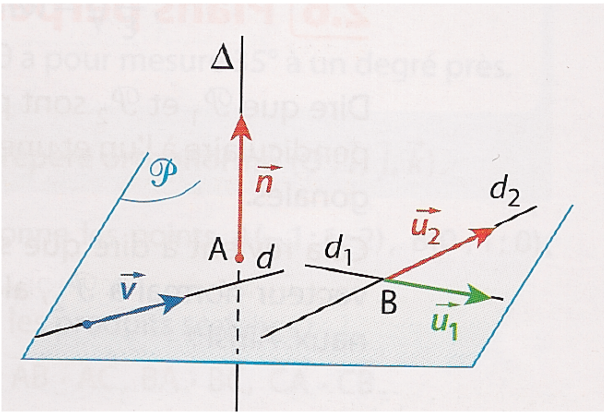


FIGURE 3 – Droite perpendiculaire à un plan

Démonstration (exigible) :
On note $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs des droites d_1 et d_2.
Comme Δ est perpendiculaire à d_1 et à d_2, on a $\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{u_2} = 0$.
Comme d_1 et d_2 sont sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
Soit d' une droite du plan $\mathcal{P}$, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont donc coplanaires et comme $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, il existe deux nombres a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}.\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{n}.(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \\
&= \overrightarrow{n}.(a\overrightarrow{u_1}) + n.(b\overrightarrow{u_2}) \\
&= a\,\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} + b\,\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_2} = 0
\end{aligned}$$

Corollaire : Pour montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est normal à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ non colinéaires.

Remarques :
— Pour montrer qu'une droite (AB) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
— Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

10. Vecteurs orthogonaux.

— Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Propriété : Caractérisation d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ passant par un point A.

M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration :

Si $M \in \mathcal{P}$, alors (AM) est une droite de $\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. On a alors $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$, on note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. On a donc

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$$

Par suite, on a $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n} = 0$. De plus, comme H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
On a donc $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n} = \pm HM \times \|\overrightarrow{n}\|$. Comme $\|\overrightarrow{n}\| \neq 0$, on a $HM = 0$. Les points H et M sont donc confondus. Le point M est donc dans le plan $\mathcal{P}$.

Exercices : 3, 4, 5 page 326[11] – 54, 55, 56 page 339[12] – 96 page 346[13] [TransMath]

5 Équation cartésienne d'un plan – Applications

5.1 Équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé

Propriété : Équation cartésienne d'un plan

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé de l'Espace.

1. Tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.
2. Réciproquement, l'ensemble des points $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M\ (x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\iff a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme voulue en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Réciproquement, soit $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$.
On peut supposer que $a \neq 0$. Le point $A\ \left(-\frac{d}{a}\,;\,0\,;\,0\right)$ vérifie alors aussi $ax + by + cz + d = 0$[14]. On pose $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$$

11. Vecteur normal à un plan.
12. Droite perpendiculaire à un plan.
13. Tétraèdre trirectangle
14. Si $a = 0$, il est aisé de trouver un autre point A vérifiant la relation car soit $b \neq 0$, soit $c \neq 0$.

Par suite : $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$ équivaut à $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$, c'est-à-dire à M appartenant au plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Remarques : 1. Pour trouver l'équation cartésienne d'un plan (dans un repère orthonormé) dont on connaît un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$, il suffit donc d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$ à l'aide des coordonnées de A et de $\overrightarrow{n}$.

2. En particulier, l'équation du plan (xOy) est $z=0$, celle du plan (xOz) est $y=0$ et celle du plan (yOz) est $x=0$.

Exercices : 7, 8, 9, 10 page 327 ; 57, 58, 59, 60page 339 et 65, 69 page 340 [15] – 11, 13 page 328 et 64, 67, 68 page 340 [16] – 29 page 332 et 92 page 345 [17] – 100 page 347 [18] [TransMath]

5.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Les résultats concernant les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'Espace sont résumés dans le tableau 1.

Remarque : $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

- Si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}\neq 0$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants un un point.
- Si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}=0$ et si A est un point *quelconque* de $\mathcal{D}$:
  - Si $A\in\mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$;
  - Si $A\notin\mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Exercice résolu : Déterminer l'intersection éventuelle du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-y+3z-2=0$ et de la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}=2\times 1+(-1)\times 1+3\times 2=7\neq 0$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont bien sécants un un point. Ce point vérifie :

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=2t \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2\,(-2+t)-(1+t)+3\times 2t-2 &= 0 \\ -4+2t-1-t+6t-2 &= 0 \\ 7t &= 7 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

et, par suite :

$$\begin{cases} x=-2+1=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=2\times 1=2 \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ est $A\ (-1\,;\,2\,;\,2)$.

15. Détermination d'équations de plans.
16. Plan défini par trois points.
17. Plans perpendiculaires.
18. Distance d'un point à un plan.

Exercices : 15, 16, 17, 18 page 329 ; 71, 72, 73 et 74, 76 page 341 page 340 [19] – 93, 95 page 345 [20] [TransMath]

5.3 Intersection de deux plans

Les résultats concernant les positions relatives de deux plans de l'Espace sont résumés dans le tableau 2.

Remarque : $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et $\mathcal{P}'$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et si A et *un point quelconque* de $\mathcal{P}$:
  - Si $A \in \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ;
  - Si $A \notin \mathcal{P}'$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.
- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.

Exercice résolu : Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-y-2z-1=0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $-x+4y+z-3=0$. Étudier l'intersection éventuelle des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}'$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$. Pour déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on va considérer une des inconnues (ici z) comme le paramètre :

$$\begin{cases}2x-y-2z-1=0\\-x+4y+z-3=0\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y=2t+1\\-x+4y=-t+3\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x-2t-1\\-x+4\left(2x-2t-1\right)=-t+3\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}7x=7t+7\\y=2x-2t-1\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t+1\\y=2\left(t+1\right)-2t-1\\z=t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$$

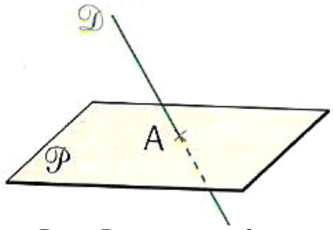
Exercices : 20, 21, 23 page 330 ; 78, 79, 80 page 341 et 83 page 342 [21] – 94 page 345 [22] [TransMath]
Module : TP 33 page 336 et exercices 101, 102 page 347 [23] [TransMath]

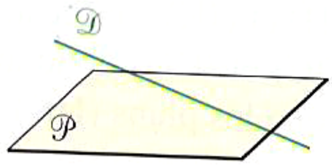
Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

3, 4, 5, 6, 7, 8

19. Intersection d'une droite et d'un plan.
20. Type BAC.
21. Intersection de deux plans.
22. Type BAC.
23. Positions relatives de trois plans.

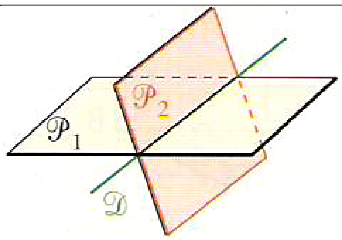
<table>
<tr><td colspan="3">Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$</td></tr>
<tr><td>sécants</td><td colspan="2">parallèles</td></tr>
<tr><td>

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun</td><td>

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun</td><td>

$\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.</td></tr>
</table>

Table 1 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

<table>
<tr><td colspan="3">Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">sécants</td><td colspan="2">parallèles</td></tr>
<tr><td>confondus</td><td>strictement parallèles ou disjoints</td></tr>
<tr><td>

leur intersection est la droite $\mathcal{D}$</td><td>

leur intersection est un plan</td><td>

leur intersection est vide</td></tr>
</table>

Table 2 – Positions relatives de deux plans