Suites arithmétiques
Suites géométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

1 Suites arithmétiques **2**

1.1 Définition, exemples 2

1.2 Expression en fonction de n 2

2 Suites géométriques **3**

2.1 Définition, exemples 3

2.2 Expression en fonction de n 3

3 Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique **4**

1 Suites arithmétiques

Activité : Activité page 32 [1] [Intervalle]

1.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :
1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, … est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$
est arithmétique de raison (-3).
3. La suite des entiers naturels : 0, 1, 2, 3,4, 5, … est arithmétique de raison 1.
4. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

1.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

— Si le premier terme est u_0, on a :

$$u_1 = u_0 + r \qquad u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \qquad u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

— Si le premier terme est u_1, on a :

$$u_2 = u_1 + r \qquad u_3 = u_2 + r = (u_1 + r) + r = u_1 + 2r \qquad u_4 = u_3 + r = (u_1 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1. Alors :

$$u_n = u_1 + (n-1)\,r$$

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

Exemples :
1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison (-2).
On a : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.
En particulier : $u_{50} = 7 - 2 \times 50 = 7 - 100 = -93$.
2. Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison $1,5$.
On a : $u_n = u_1 + (n-1)\,r = 3 + (n-1) \times 1,5 = 3 + 1,5n - 1,5 = 1,5n + 1,5$.
En particulier : $u_{50} = 1,5 \times 50 + 1,5 = 76,5$.

Exercices : 1, 2, 11, 12 page 37 [2] ; 7, 9 page 37 et 18, 20 page 38 [3] ; 22, 24 page 38 et 126 page 52 [4] ; 124, 125 page 52 [5] [Intervalle]

1. Progression régulière.
2. Calcul de termes.
3. Détermination de la raison ou du terme initial.
4. Utilisation des suites arithmétiques.
5. Résolutions d'équations. Applications.

Remarque : On peut utiliser le tableur ou la calculatrice pour déterminer les termes consécutifs d'une suite arithmétique. Pour une utilisation du tableur, voir l'exemple ci-dessous et pour l'utilisation de la calculatrice, voir la fiche « Suites : utilisation de la calculatrice ».

Exemple : On veut, à l'aide d'un tableur, obtenir les 50 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 17$ et de raison -5.
On se référera au fichier `suite_arithmetique.ods` ou `suite_arithmetique.xls`.

1. On place dans la colonne `A` les 50 premiers indices en utilisant la poignée de recopie (comme le premier indice est zéro, il est normal que le 50ième soit 49) ;
2. On place la valeur du terme initial dans la cellule `B1`.
3. Dans la cellule `B2`, on place la formule `=B1-5` et on tire la poignée de recopie jusqu'à `B50`.

Exercice : 6, 15 page 37[6] [Intervalle]

2 Suites géométriques

Activité : Activité page 34[Intervalle][7]

2.1 Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé **raison** de la suite.

Exemples :
1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 0,75u_n \end{cases}$$
est arithmétique de raison $0,75$.
3. Un capital (C_n) est placé à intérêts composés de de 4%. On a alors $C_{n+1} = 1,04C_n$. C'est donc une suite géométrique de raison $1,04$.

2.2 Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

— Si le premier terme est u_0, on a :

$$u_1 = u_0 \times q \qquad u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2 \qquad u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) \times q = u_0 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

— Si le premier terme est u_1, on a :

$$u_2 = u_1 \times q \qquad u_3 = u_2 \times q = (u_1 \times q) \times q = u_1 \times q^2 \qquad u_4 = u_3 \times q = \left(u_1 \times q^2\right) \times q = u_1 \times q^3$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 2 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1. Alors :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

6. Utilisation du tableur.
7. Les dix jours fous.

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison $1,1$.
On a : $u_n = u_0 \times q^n = 80 \times 1,1^n$.
En particulier : $u_{10} = 8 \times 1,1^{10} \simeq 207,5$.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 100$ et de raison $0,8$.
On a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 100 \times 0,8^{n-1}$.
En particulier : $u_{10} = 100 \times 0,8^9 \simeq 13,42$.

Exercices : 27, 28, 41 page 39 [8] ; 33, 36, 37 page 39 et 46, 49, 50 page 40 [9] ; 53, 55 page 40 et 127, 129 page 52 [10] ; 133, 135 page 53 et 136 page 54 [11] [Intervalle]

Remarque : On peut utiliser le tableur ou la calculatrice pour déterminer les termes consécutifs d'une suite arithmétique. Pour une utilisation du tableur, voir l'exemple ci-dessous et pour l'utilisation de la calculatrice, voir la fiche « Suites : utilisation de la calculatrice ».

Exemple : On veut, à l'aide d'un tableur, obtenir les 50 premiers termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 80$ et de raison $1,1$.
On se référera au fichier `suite_geometrique.ods` ou `suite_geometrique.xls`.

1. On place dans la colonne `A` les 50 premiers indices en utilisant la poignée de recopie (comme le premier indice est zéro, il est normal que le 50ième soit 49) ;
2. On place la valeur du terme initial dans la cellule `B1`.
3. Dans la cellule `B2`, on place la formule `=B1*1,1` et on tire la poignée de recopie jusqu'à `B50`.

Exercice : 43, 45 page 37 [12] [Intervalle]

3 Sommes des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique

On veut calculer la somme des k premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
— Si le premier terme est u_0, cette somme est : $S = u_0 + u_1 + \dots u_{k-1}$;
— Si le premier terme est u_1, cette somme est : $S = u_1 + u_2 + \dots u_k$;

Remarque : On peut utiliser le tableur (grâce à l'instruction `=SOMME()`, voir les fichiers correspondants pour la somme des 50 premiers termes de u_0 à u_{49}) ou la calculatrice (voir page 43 [Intervalle]) pour calculer ces sommes.

Exercices : 65, 66 page 41 et 68, 69, 71, 73, 75, 77, 79 page 42 [13] ; 85 page 43 et 86, 89, 91, 92, 96, 98, 100 page 44 [14] ; 104, 106, 109, 110 page 45 [15] ; 137 page 54 [16] ; 138 page 54 et 139, 141 page 55 [17] [Intervalle]

Références

[Intervalle] Collection Intervalle, Mathématiques, programme 2013, Term STMG, Nathan, 2013.

2, 3, 4

8. Calcul de termes.
9. Détermination de la raison ou du terme initial.
10. Utilisation des suites géométriques.
11. Comparaison de suites aritmétiques et géométriques.
12. Utilisation du tableur.
13. Utilisation du tableur.
14. Utilisation de la calculatrice.
15. Problèmes concrets.
16. QCM.
17. Type BAC