Probabilités conditionnelles

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

---

1 Un exemple pour comprendre

Exemple : Pour fabriquer un objet, un artisan achète des pièces auprès de trois fournisseurs $A1$, $A2$ et $A3$.
25 % des pièces proviennent de $A1$, 40 % de $A2$ et le reste de $A3$.
5 % des pièces de $A1$ ont un défaut, 10 % de celles de $A2$ ont un défaut, de me que $0,1$ % de celle de $A3$.
On prend au hasard une de ces pièces.
Calculer la probabilité de l'événement D : « la pièce présente un défaut ».

L'univers Ω est l'ensemble des pièces fabriquées par $A1$, $A2$ et $A3$. On suppose qu'il comporte n éléments.
On note A_i l'événement : « la pièce provient du fournisseur Ai ».
On modélise la situation par un arbre (voir figure 1).

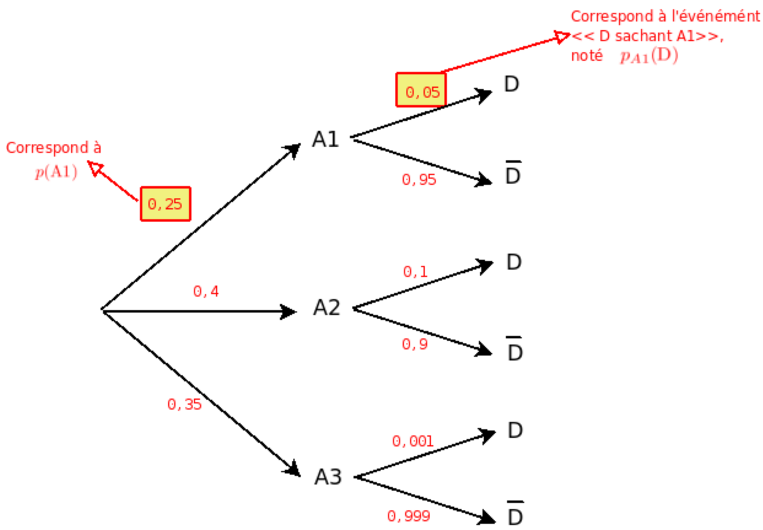

FIGURE 1 – Probabilités conditionnelles : utilisation d'un arbre

L'événement représenté par le chemin $-A_1-D$ est l'événement « la pièce provient du fournisseur $A1$ et présente un défaut », c'est-à-dire $A_1 \cap D$.
Cet événement comporte $0,25 \times 0,05 \times n$ issues, on a donc :

$$p(A_1 \cap D) = \frac{0,25 \times 0,05 \times n}{n} = 0,25 \times 0,05 = p(A_1) \times p_{A_1}(D) = 0,0125$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A_1 \cap D) + p(A_2 \cap D) + p(A_2 \cap D) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(D) + p(A_2) \times p_{A_2}(D) + p(A_3) \times p_{A_3}(D) \\ &= 0,25 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001 = 0,05285 \end{aligned}$$

2 Probabilités conditionnelles – Arbre de probabilité

2.1 Probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarques : 1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :

$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$

2. $p_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Remarque : Cette propriété découle directement de la définition. Elle permet de calculer la probabilité d'un événement représenté par une chemin sur un arbre de probabilités (voir figure 1).

Exercices : 1, 3, 4, 6 page 91[1] – 10, 12, 13 page 92 et 15 page 93[2] – 18, 19 page 93 et 22 page 94[3] [Intervalle]

2.2 Arbre de probabilité

Propriété 2 : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements deux-à-deux incompatibles et $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
Alors :

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

Définition : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux incompatibles et si $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Conséquence : Formule des probabilités totales
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un événement. On a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) \\ \text{où} \quad & p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B) \end{aligned}$$

Remarque : On utilise souvent cette formule à l'aide d'un arbre pondéré, en suivant les règles suivantes :
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
- la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent (c'est la formule des probabilités totales).

Exercices : 25, 26, 27 page 94 et 30, 32, 35, 36 page 95[4] – 37, 38, 39 page 96[5] – 46 page 99 ; 48, 50 page 100 ; 52 page 101 ; 53, 55 page 102 et 56, 57 page 103[6] [Intervalle]

Références

[Intervalle] Collection Intervalle, Mathématiques, programme 2013, Term STMG, Nathan, 2013.

3

1. Probabilités conditionnelles.
2. Avec un tableau.
3. Plus difficiles.
4. Arbres de probabilités.
5. Utilisation.
6. Type BAC