Loi binomiale
Lois normales

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

1 Rappels sur la loi binomiale

1.1 Loi de Bernoulli

Définition : — On appelle épreuve de BERNOULLI toute épreuve à deux issues possibles : un succès (noté S) ou un échec (noté $\overline{S}$).
— La loi de BERNOULLI est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y prenant la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si l'issue est un échec.
On note $p = p(Y = 1) = p(S)$.
p est appelé paramètre de la loi de BERNOULLI.
— On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire Y suit la loi de BERNOULLI.

1.2 Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

Définition : — On appelle schéma de BERNOULLI d'ordre n l'expérience consistant à répéter n fois de manière indépendantes la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
— La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X prenant prenant comme valeurs le nombre de succès (S) obtenus au cours des n épreuves du schéma de Bernoulli.
— On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition : Le nombre de chemins de l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Les nombres entiers $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Remarque : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ se lit « k parmi n »

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Les valeurs de X sont $\{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\dots\,;\,n\}$
2. Pour tout $k \in \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\dots\,;\,n\}$:

$$p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

1.3 Espérance, variance, écart-type

Propriété : (admis)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
— Son espérance est : $E(X) = np$
— Sa variance est : $V(X) = np(1-p)$
— Son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

1.4 Utilisation de la calculatrice

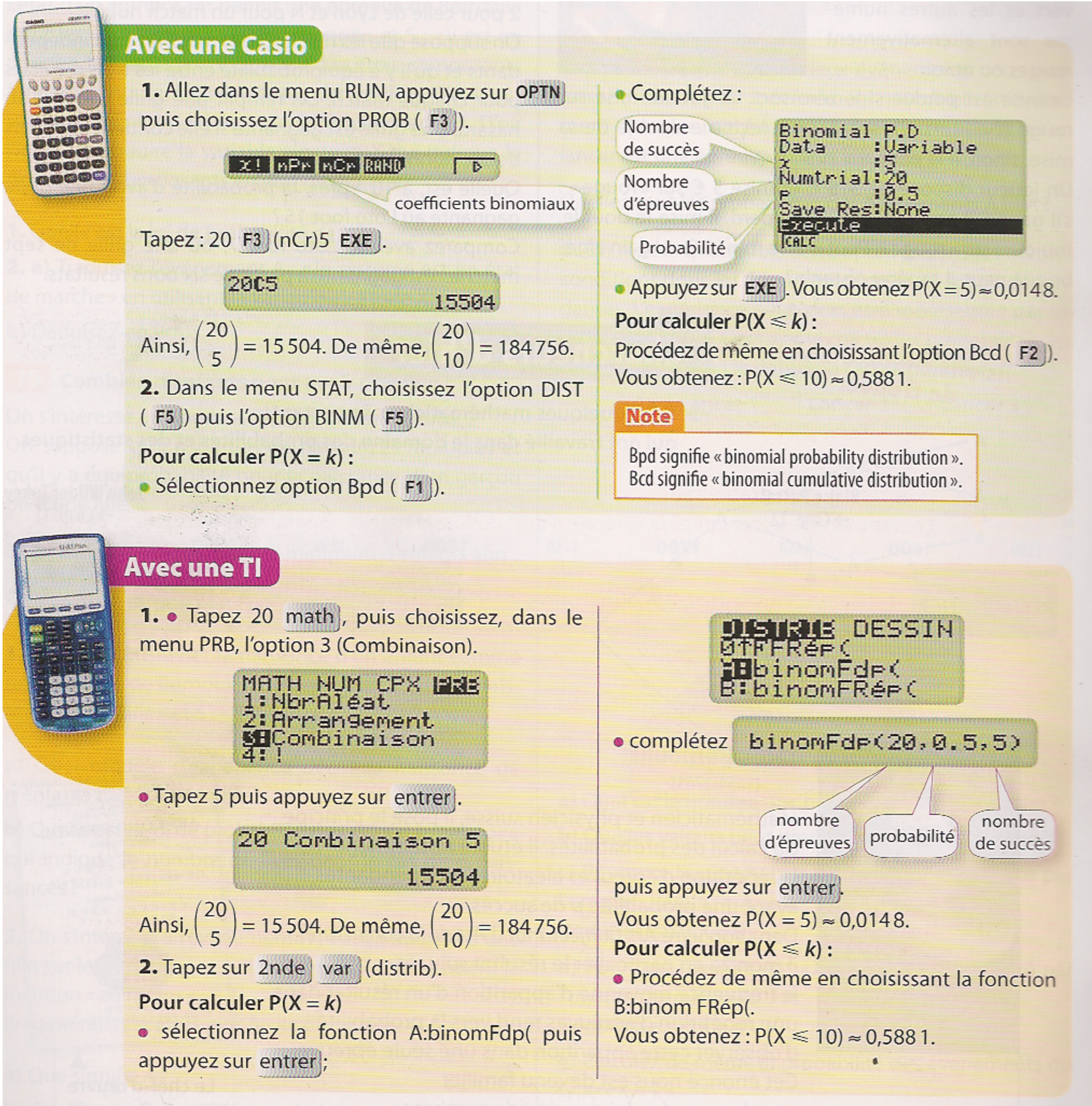
On peut utiliser la calculatrice pour :

1. Afficher des coefficients binomiaux
2. Afficher des probabilités suivant une loi binomiale.

Exemple : On lance 20 fois de suite une pièce équilibrée. X est la variable aléatoire qui indique le nombre de sorties de « Face ».
On sait que X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $0,5$.
On va utiliser la calculatrice pour :

1. Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{20}{5}$ et $\binom{20}{10}$.
2. Calculer, à 10^{-4} près, $p\,(X = 5)$ et $p\,(X \leq 10)$.

Les résultats et la méthode sont donnés sur la figure 1[1].



Avec une Casio

1. Allez dans le menu RUN, appuyez sur OPTN puis choisissez l'option PROB (F3).

x! nPr nCr RAND — coefficients binomiaux

Tapez : 20 F3 (nCr)5 EXE .

20C5 15504

Ainsi, $\binom{20}{5} = 15\,504$. De même, $\binom{20}{10} = 184\,756$.

2. Dans le menu STAT, choisissez l'option DIST (F5) puis l'option BINM (F5).

Pour calculer P(X = *k*) :

- Sélectionnez option Bpd (F1).
- Complétez :

Binomial P.D
Data :Variable
x :5
Numtrial:20
p :0.5
Save Res:None
Execute

Nombre de succès — Nombre d'épreuves — Probabilité

- Appuyez sur EXE . Vous obtenez P(X = 5) ≈ 0,0148.

Pour calculer P(X ≤ *k*) :
Procédez de même en choisissant l'option Bcd (F2).
Vous obtenez : P(X ≤ 10) ≈ 0,5881.

Note
Bpd signifie « binomial probability distribution ».
Bcd signifie « binomial cumulative distribution ».

Avec une TI

1. • Tapez 20 math , puis choisissez, dans le menu PRB, l'option 3 (Combinaison).

MATH NUM CPX PRB
1:NbrAléat
2:Arrangement
3:Combinaison
4:!

• Tapez 5 puis appuyez sur entrer .

20 Combinaison 5
15504

Ainsi, $\binom{20}{5} = 15\,504$. De même, $\binom{20}{10} = 184\,756$.

2. Tapez sur 2nde var (distrib).

Pour calculer P(X = *k*)

• sélectionnez la fonction A:binomFdp(puis appuyez sur entrer ;

DISTRIB DESSIN
0↑FRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(

• complétez binomFdp(20,0.5,5)

nombre d'épreuves — probabilité — nombre de succès

puis appuyez sur entrer .
Vous obtenez P(X = 5) ≈ 0,0148.

Pour calculer P(X ≤ *k*) :

• Procédez de même en choisissant la fonction B:binom FRép(.
Vous obtenez : P(X ≤ 10) ≈ 0,5881.

FIGURE 1 – Utilisation de la calculatrice – Loi binomiale

Exercices 1, 2, 3 page 405[2] [TransMath]

1. Ils sont tirés du transMATH 1ereS, programme 2011 (NATHAN)
2. Loi binomiale.

2 Loi normale centrée réduite

Activité : D'un histogramme à une courbe en cloche (sur feuille polycopiée)

2.1 Théorème de Moivre-Laplace

Théorème : (Admis)
Pour tout nombre entier naturel n, X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On pose :

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$$

Z_n est appelée variable centrée réduite associée à X_n.
Alors, pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, le nombre $p\,(a \leq Z_n \leq b)$ tend vers :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : On va donc pouvoir donner une approximation d'une probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale par un calcul d'intégrale.
On dit qu'on passe alors d'une loi discrète à une loi continue.

2.2 Loi normale centrée réduite

Définition : On appelle fonction de Laplace-Gauss la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sa courbe représentative est donnée sur la figure 2. On l'appelle courbe de Gauss ou courbe en cloche.

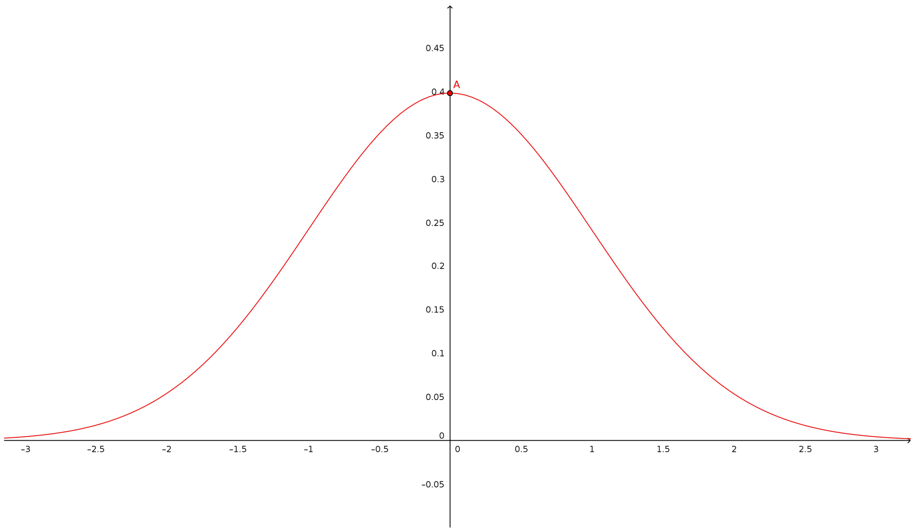


Figure 2 – Fonction de Laplace-Gauss

Remarques : 1. Le point A a comme coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ car $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$

2. La courbe représentant f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. On admettra que l'aire totale sous la courbe en cloche est égale à 1, c'est-à-dire que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. La fonction φ est donc une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition : On dit qu'une variable aléatoire Z sur $\mathbb{R}$ suit la loi normale centrée réduite si la probabilité que Z soit compris entre a et b est l'aire du domaine sous la courbe en cloche entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (voir figure 3).
On a donc :

$$P(a \le Z \le b) = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

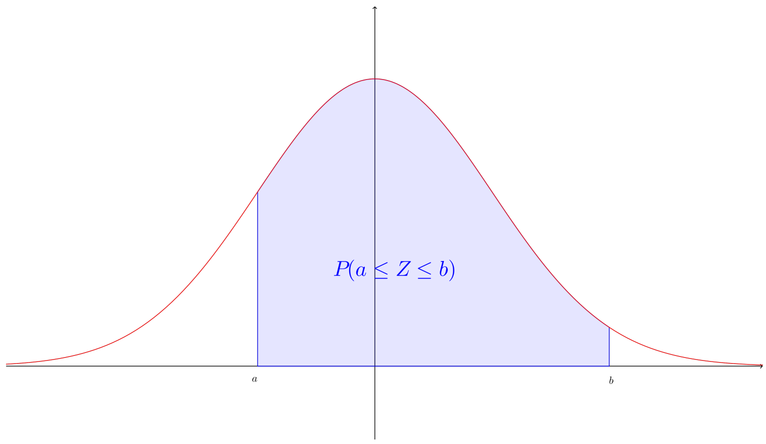


FIGURE 3 – Loi normale centrée réduite

Remarques : 1. Cela signifie que la variable aléatoire Z admet la fonction φ comme fonction de densité.

2. On a donc $P(Z = a) = 0$ et $P(a \le Z \le b) = P(a < Z \le b) = P(a \le Z < b) = P(a < Z < b)$
3. Comme la courbe de Gauss est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : $P(Z \le 0) = P(Z \ge 0) = 0,5$.

Exercice : 44 page 425 [3] [TransMath]

2.3 Espérance et variance

Définition : Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

— L'espérance mathématique de Z est le nombre $E(Z)$ défini par :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

— La variance de Z est le nombre $V(Z)$ défini par : $V(Z) = E\left((Z-m)^2\right)$ où $m = E(Z)$

— L'écart-type de Z est le nombre $\sigma(Z)$ défini par : $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)}$

Propriété : (admise)
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Alors :

$$E(Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(Z) = 1$$

Remarque : La loi normale centrée réduite est notée $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Exercices : 82, 83 page 432 [4] [TransMath]

3. Points d'inflexion de la courbe de GAUSS.
4. Espérance et variance de la loi normale centrée réduite.

2.4 Utilisation de la calculatrice

On ne peut pas trouver grâce aux techniques habituelles de primitives de la fonction φ. On utilisera donc la calculatrice ou un tableur qui permet de calculer directement $P\,(a \leq Z \leq b)$ lorsque Z suit la loi normale centrée réduite.

Méthode : Sachant que Z suit la loi $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$, calculer $P\,(-1 \leq Z \leq 2)$.
Voir figure 4 pour l'utilisation de la calculatrice.

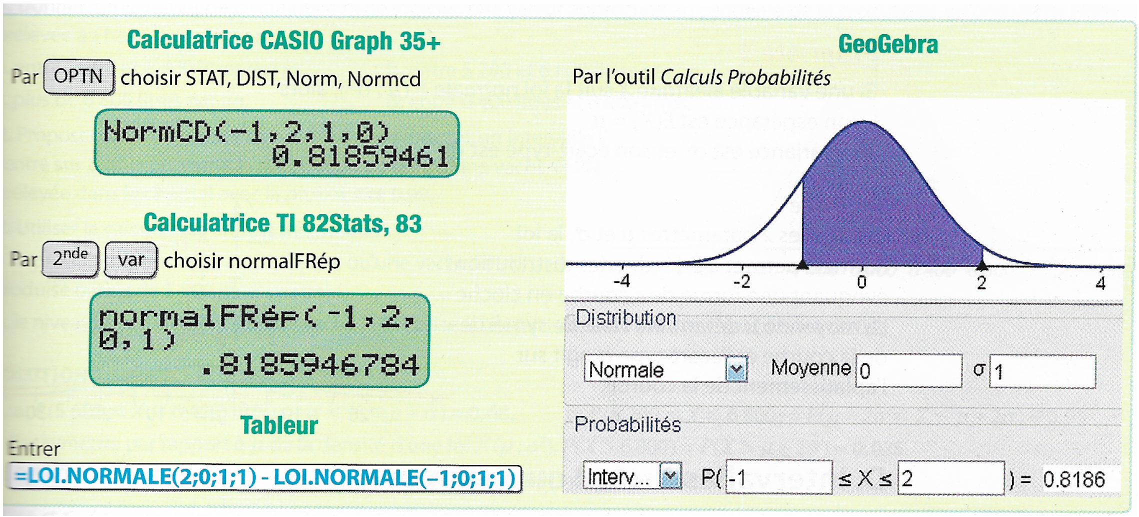


FIGURE 4 – Utilisation de la calculatrice – Loi normale

Exemples : 1. À l'aide de la calculatrice, on a $P\,(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$

2. Quelques valeurs à connaître (trouvées à l'aide de la calculatrice) :

$$P\,(-1 < Z < 1) \simeq 0,683 \qquad P\,(-2 < Z < 2) \simeq 0,954 \qquad P\,(-3 < Z < 3) \simeq 0,997$$

Exercices : 1, 2, 3, 5, 6 page 413 et 36, 37, 43 page 425 [5] – 44 page 425 [6] – 76, 77 page 431 [7] [TransMath]

2.5 Intervalle centrée sur 0 de probabilité donnée

Propriété : Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\,(0\,;\,1)$.
Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.
Il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que :

$$P\,(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$$

(voir figure 5)

Remarque : Pour la démonstration, On introduira une fonction auxiliaire appelée fonction de répartition :
On pose, pour tout nombre x :

$$\Phi\,(x) = P\,(Z \leq x)$$

Φ est appelée fonction de répartition de Z

La fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Loi normale centrée réduite.
6. Point d'inflexion de la courbe de GAUSS.
7. Restitution organisée des connaissances.

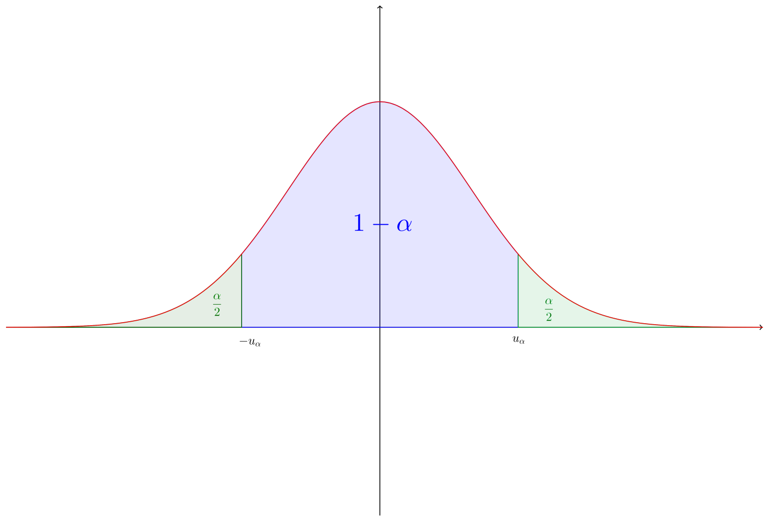


FIGURE 5 – Intervalle de probabilité donnée

Démonstration (exigible) :
On cherche $x>0$ tel que $P(-x<Z<x)=1-\alpha$.
On a : $P(-x<Z<x)=P(Z<x)-P(Z\leq -x)=\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-(1-\Phi(x))=2\Phi(x)-1$
D'où :

$$\begin{aligned}2\Phi(x)-1&=1-\alpha\\2\Phi(x)&=2-\alpha\\\Phi(x)&=1-\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

De plus, la fonction Φ est continue sur $[0\,;+\infty[$, strictement croissante.
$\Phi(0)=\frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=1$.
Comme :

$$\begin{array}{rcl}0< & \alpha & <1\\-1< & -\alpha & <0\\-\dfrac{1}{2}< & -\frac{\alpha}{2} & <0\\\dfrac{1}{2}< & 1-\frac{\alpha}{2} & <1\end{array}$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\Phi(x)=1-\frac{\alpha}{2}$ admet une seule solution sur $]0\,;+\infty[$. On note cette solution u_α.

Remarques : 1. On a aussi $P(-u_\alpha\leq Z<u_\alpha)=P(-u_\alpha<Z\leq u_\alpha)=P(-u_\alpha\leq Z\leq u_\alpha)=1-\alpha$.
2. Pour déterminer u_α, on utilisera la calculatrice ou le tableur. Voir figure 6 .

Exemples à connaître : 1. Comme $P(-1,96<Z<1,96)=0,95=1-0,05$; on a $u_{0,05}=1,96$.
2. À l'aide de la calculatrice, $P(-2,58<Z<2,58)=0,99=1-0,01$; on a donc $u_{0,01}=2,58$.

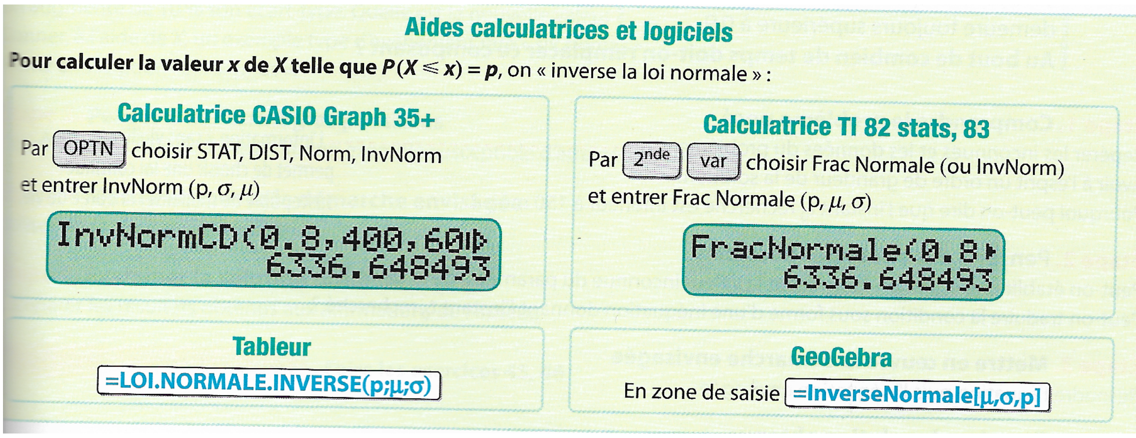
Exercices : 7, 9, 10 page 414 et 38, 41, 42 page 425[8] – 78 page 431[9] [TransMath]

3 Lois normales – Cas général

3.1 Définition, espérance, variance

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

8. Intervalle centré sur zéro de probabilité donné.
9. Restitution organisée des connaissances.


Aides calculatrices et logiciels

Pour calculer la valeur x de X telle que $P(X \leqslant x) = p$, on « inverse la loi normale » :

Calculatrice CASIO Graph 35+

Par OPTN choisir STAT, DIST, Norm, InvNorm

et entrer InvNorm (p, σ, μ)

InvNormCD(0.8,400,60
6336.648493

Calculatrice TI 82 stats, 83

Par 2nde var choisir Frac Normale (ou InvNorm)

et entrer Frac Normale (p, μ, σ)

FracNormale(0.8
6336.648493

Tableur

=LOI.NORMALE.INVERSE(p;μ;σ)

GeoGebra

En zone de saisie =InverseNormale[μ,σ,p]

FIGURE 6 – Utilisation de la calculatrice – Inversion d'une loi normale

Remarque : On peut montrer que, dans ce cas, la loi de densité est donnée par la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On a tracé la courbe représentative de cette fonction sur la figure 7.
Cette courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

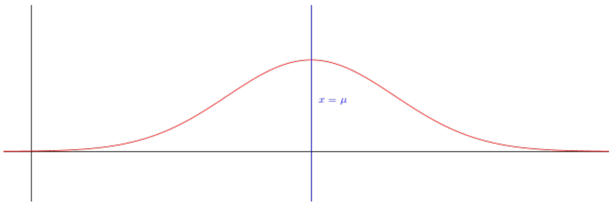


FIGURE 7 – Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$

Propriété : (admise)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. Alors :

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sigma$$

Remarque : Les paramètres de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ sont donc son espérance et sa variance.
On peut montrer que, plus l'écart-type σ est important, plus la courbe est « aplatie ». Voir page 411 [TransMath] pour des exemples de courbes.

Exercices : 11, 12 page 415 ; 46, 47, 48, 52 page 426 et 53, 55 page 427 [10] – 45 page 426 [11] – 88 page 433 [12] – 90 page 433 [13] [TransMath]

3.2 Probabilités d'événements particuliers

On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.
On note :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

10. Lois normales – Cas général.
11. Espérance et variance.
12. Don du sang.
13. Contrôle de qualité.

Alors Z suit la loi normale centrée réduite et $X = \mu + \sigma Z$.
Par suite : $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < Z < 1)$; $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(-2 < Z < 2)$; etc.
On a donc la propriété suivante :

Propriété : Soit X la variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$. Alors :

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \simeq 0,683$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \simeq 0,954$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$$

Exercices : 19 page 418 ; 57, 58 page 427 et 80, 81 page 432 [14] [TransMath]

3.3 Approximation normale d'une loi binomiale

On rappelle le théorème de Moivre-Laplace :

Théorème : (Admis)
Pour tout nombre entier naturel n, X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On pose :

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Z_n est appelée variable centrée réduite associée à X_n.
Alors, pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, le nombre $p(a \leq Z_n \leq b)$ tend vers :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : Dans la pratique, lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, l'erreur sur les probabilités calculées est très faible.
Lorsque ces trois conditions sont remplies, on pourra approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$, avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercices : 13, 14 page 416 ; 20, 21 page 418 ; 60 page 427 et 62, 63, 65 page 428 [15] – 74, 79 page 431 [16] – 75 page 431 [17] [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH Term S, programme 2012 (Nathan)

3, 5, 6, 7, 8, 9

14. Déterminer μ et σ
15. Approximation normale d'une loi binomiale.
16. Type BAC.
17. QCM.