Fonctions trigonométriques

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

---

1 Rappels de trigonométrie

1.1 Définitions, premières propriétés

Définition : Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et x un réel (voir figure 1).
On appelle M le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique.
On appelle **cosinus et sinus** de x (notés $\cos x$ et $\sin x$) les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.

$\cos x$: abscisse du point M

$\sin x$: ordonnée du point M.

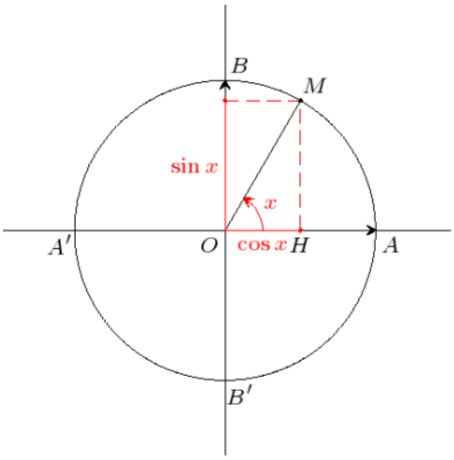

Figure 1 – Cosinus et sinus

Remarques : 1. Pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & \cos x & \leq 1 \\ -1 \leq & \sin x & \leq 1 \end{array}$$

2. $A\ (1\,;0)$ donc : $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
   $B\ (0\,;1)$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
   $A'\ (-1\,;0)$ donc : $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
   $B'\ (0\,;-1)$ donc : $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
3. Le triangle OHM est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

   Or, $OM = 1$, $OH^2 = (\cos x)^2$ et $HM^2 = (\sin x)^2$. On a donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

4. Les cosinus et sinus des angles remarquables sont donnés dans le tableau 1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Table 1 – Valeurs remarquables de cosinus et sinus.

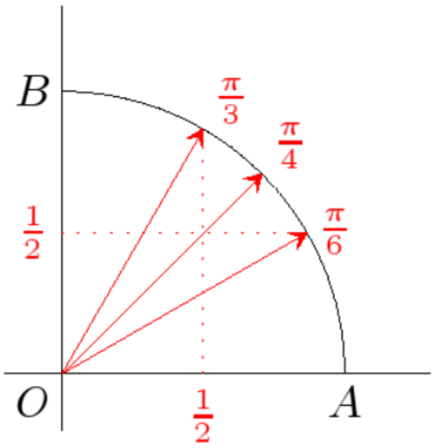

FIGURE 2 – Angles remarquables

Remarque : Pour retenir tous les résultats du tableau 1, on peut s'aider du cercle trigonométrique (voir figure 2).

Exercices : 50, 51 page 183 [1] – 3 page 173 et 52, 53, 54 page 183 [2] – 6, 8, 9 page 174 [3] [TransMath]

1.2 Formules de trigonométrie

Angles associés : 1. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
3. $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Formules d'addition : 1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Formules de duplication : 1. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

2. $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$
3. $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

2 Fonctions sinus et cosinus

2.1 Définition

Définition : 1. La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}$, associe $\cos x$ est appelée fonction cosinus et est notée :

$$\cos : x \to \cos x$$

2. La fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}$, associe $\sin x$ est appelée fonction sinus et est notée :

$$\sin : x \to \sin x$$

Remarque : Les images des fonctions sinus et cosinus sont toujours dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

1. Équations trigonométriques
2. Inéquations trigonométriques.
3. Avec un changement de variable.

2.2 Parité

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x et M_1 le point associé au réel $(-x)$ (voir figure 3).

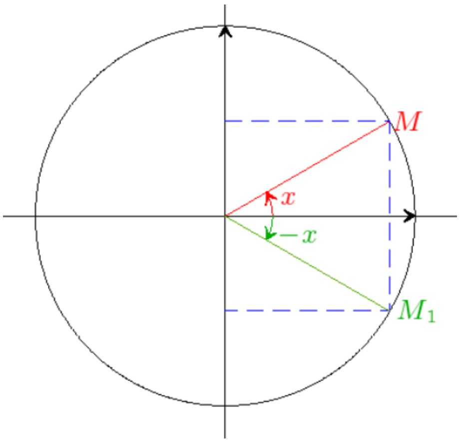

FIGURE 3 – Cosinus et sinus de $-x$

M $(\cos x\,;\,\sin x)$ et M_1 $(\cos(-x)\,;\,\sin(-x))$.
Comme M et M_1 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Propriété 1 : La fonction cosinus est paire.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété 2 : La fonction sinus est impaire.
Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

2.3 Périodicité

Soit x un réel. Le point M associé à x sur le cercle trigonométrique est aussi associé à $x + 2\pi$.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

Propriété : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
Il suffit donc d'étudier ces fonctions sur un intervalle de longueur 2π. On obtient leurs courbes représentatives sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

3 Étude des fonctions sinus et cosinus

3.1 Dérivées des fonctions cosinus et sinus

Théorème (admis)
Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Remarque : On en déduit donc les résultats suivants :

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \cos(x)$ est $F(x) = \sin(x)$.
2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \sin(x)$ est $F(x) = -\cos(x)$.
3. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \cos(u)$.
4. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $-u' \sin(u)$.
5. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si f est de la forme $u' \cos(u)$, alors une primitive de f sur I est $\sin(u)$.
6. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si f est de la forme $u' \sin(u)$, alors une primitive de f sur I est $-\cos(u)$.

Exercices : 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34 page 182[4] – 36 page 182[5] – 11 page 201 ; 27 page 204 ; 40 page 208 ; 71 page 217 et 77, 78, 84 page 218[6] [TransMath]

3.2 Variations, courbe représentative

Étude de la fonction cosinus : La fonction cosinus est périodique de période 2π, on peut donc limiter l'étude de cette fonction à un intervalle d'amplitude 2π. On prendra l'intervalle $I = [-\pi ; \pi]$.
On note $f(x) = \cos x$.
f est dérivable sur I et $f'(x) = -\sin x$.
À l'aide du cercle trigonométrique, on a facilement le signe de $\sin x$:

x	$-\pi$		0		π
$\sin x$	0	$-$	0	$+$	0

On en déduit le tableau de variations de la fonction cosinus :

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	$+$	0	$-$	0
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

La courbe représentative de la fonction cosinus se trouve sur la figure 4.

Étude de la fonction cosinus : La fonction sinus est périodique de période 2π, on peut donc limiter l'étude de cette fonction à un intervalle d'amplitude 2π. On prendra l'intervalle $I = [-\pi ; \pi]$.
On note $g(x) = \sin x$.
g est dérivable sur I et $g'(x) = \cos x$.
À l'aide du cercle trigonométrique, on a facilement le signe de $\cos x$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Calculs de dérivées.
5. Tangentes.
6. Primitives, intégrales.

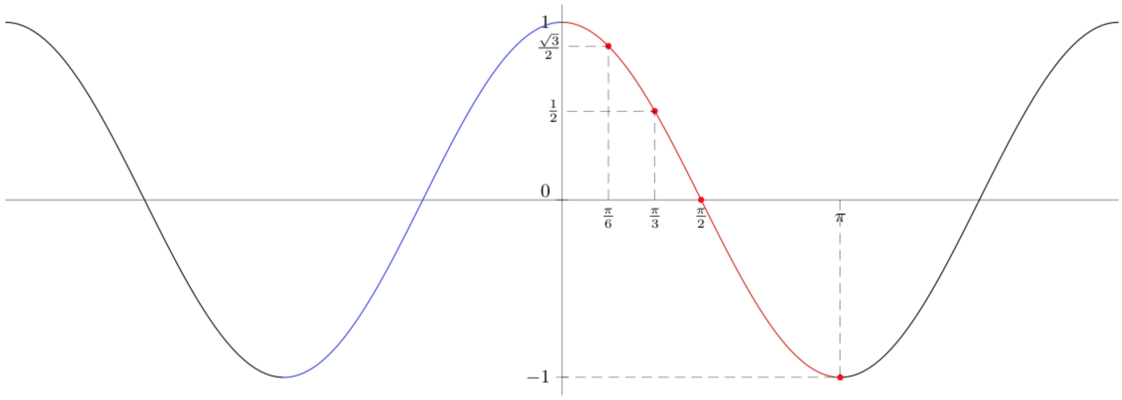

FIGURE 4 – Fonction cosinus

On en déduit le tableau de variations de la fonction sinus :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

La courbe représentative de la fonction sinus se trouve sur la figure 5.

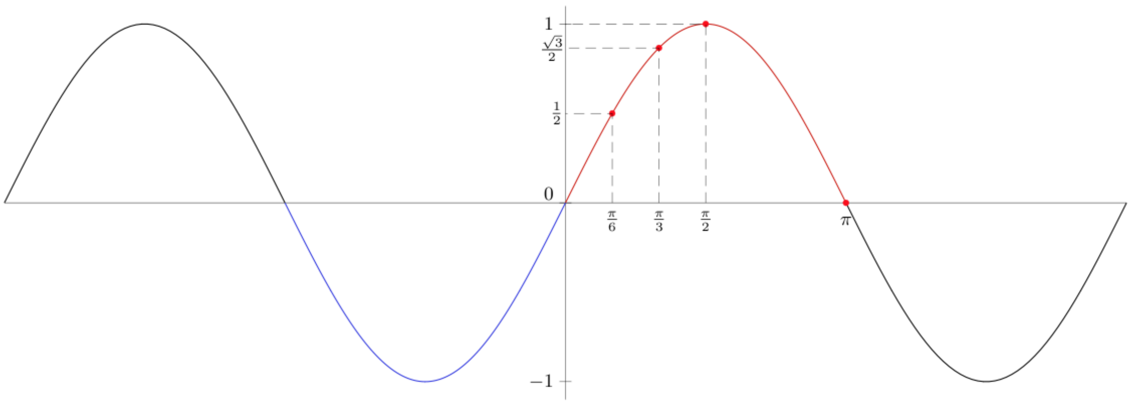

FIGURE 5 – Fonction sinus

Exercices : 1, 2 page 172 ; 4, 5 page 173 ; 14 page 176 ; 58 page 184 [7] – 15 page 176 et 60 page 184 [8] – 61 page 184 [9] – 71, 72, 74 page 187 [10] [TransMath]

3.3 Complément : limite de $\frac{\sin x}{x}$ en zéro

Propriété :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

7. Étude de fonctions.
8. Suites et fonctions trigonométriques.
9. Vrai-Faux.
10. Type BAC.

Démonstration :
Si $x \neq 0$, le taux d'accroissement de la fonction sinus entre 0 et x est :

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \frac{\sin x}{x}$$

Or, la fonction sinus est dérivable en zéro, donc la limite de ce taux d'accroissement lorsque x tend vers zéro est le nombre dérivé en zéro, d'où :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin' (0) = \cos (0) = 1$$

Exercices : 38, 39, 41 page 182 ; 43, 45, 46, 48 page 183 [11] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term S, Programme 2012 (Nathan)

3, 5, 6, 7

11. Limites de fonctions et de suites.