Fonctions rationnelles

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1 Dérivée d'une fonction rationnelles

1.1 Quelques rappels sur la dérivation

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées (voir figure 1), on dit que la fonction f est dérivable en a et on appelle nombre dérivé de f en a le coefficient directeur de cette tangente.
Le nombre dérivé de f en a est noté $f'(a)$.

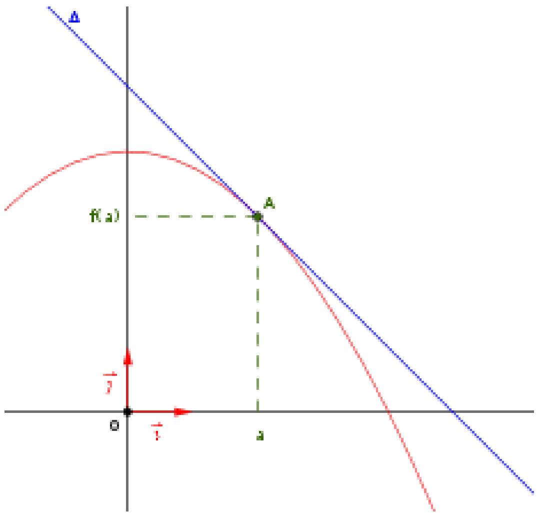

FIGURE 1 – Tangente à une courbe

Remarque : Attention ! Il ne faut pas confondre :

— $f'(a)$: nombre dérivé de f en a, coefficient directeur de la tangente au point de la courbe d'abscisse a ;

— $f(a)$: image de a par f, ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.

Propriété 1 : (admise)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$, où k est une constante réelle.
   alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.
   alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, où n est une entier supérieur ou égal à 1.
   alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Remarque : Les cas d'utilisation les plus fréquents de ces résultats sont regroupés dans le tableau 1.

$f(x)$	k (constante)	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$

TABLE 1 – Dérivée de x^n

Exemples :
1. La fonction $f(x) = 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 0$.
2. La fonction $f(x) = x^7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 7x^6$.

Propriété 2 : 1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel.
Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est ku'.
On note : $(ku)' = ku'$.

2. Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' + v'$.
On note : $(u+v)' = u' + v'$.

Remarque : De la même façon, on a donc $(u-v)' = u' - v'$.

1.2 Cas général

Propriété 1 : Dérivée de la fonction inverse
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 + \frac{3}{x}$.
On a $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1 + 3 \times \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = 3x^2 + 2 \times 2x - 1 + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 + 4x - 1 - \frac{3}{x}$.

Propriété : Dérivée d'un quotient
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telle que, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
On note :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+5}{x-2}$.
f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 4x + 5$ et $v(x) = x - 2$.
u et v sont dérivables sur $]2\,;\,+\infty[$, on a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$. De plus, v ne s'annule pas sur $]2\,;\,+\infty[$.
Par suite, f est dérivable sur $]2\,;\,+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{4 \times (x-2) - (4x+5) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{4x - 8 - 4x - 5}{(x-2)^2} = -\frac{13}{(x-2)^2}$$

Remarque : Il résulte cette propriété que toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exercices : 4, 8 page 115 ; 17, 19, 20 page 116 [1] – 25, 28, 35, 36, 38, 42, 43, 45, 47 page 116 et 51, 52 page 117 [2] [Intervalle]

2 Applications de la dérivation

2.1 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
— Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

1. Fonction inverse.
2. Dérivée d'un quotient

Remarques : 1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.

2. Pour étudier les variations d'une fonction, il faut donc étudier le signe de sa dérivée. Pour cela, on pourra se reporter à la fiche de révisions sur les études de signes.

Exemple : 1. f définie sur $]-\infty\,;\,-0,5[$ par :

$$f(x) = \frac{x-5}{2x+1}$$

On pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x-5 & u'(x) = 1 \\ v(x) = 2x+1 & v'(x) = 2 \end{array}$$

On a alors :

$$f'(x) = \frac{1\times(2x+1) - 2\times(x-5)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2x-10}{(2x+1)^2} = -\frac{9}{(2x+1)^2}$$

Comme $(2x+1)^2 > 0$ (c'est un carré) et $-9 < 0$, $f'(x)$ est strictement négative sur $]-\infty\,;\,-0,5[$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-0,5$
Signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$
Variations de $f(x)$		$\searrow$	$\Vert$

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,30]$ par :

$$g(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$$

On a :

$$g(x) = x + 60 + 121 \times \frac{1}{x}$$

donc :

$$g'(x) = 1 + 0 + 121 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{121}{x^2} = \frac{x^2-121}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$ (c'est un carré), $g'(x)$ est du signe de $x^2 - 121$ sur $[1\,;\,30]$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 0^2 - 4\times\times(-121) = 484$.
$\Delta > 0$, il y a deux racines : $x_1 = \frac{-0-\sqrt{484}}{2} = -11$ et $x_2 = \frac{-0+\sqrt{484}}{2} = 11$.
On en déduit le signe de $x^2 - 1211$:

x	$-\infty$		-11		11		$+\infty$
Signe de x^2-121		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de g :

x	1		11		30
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $g(x)$	182	$\searrow$	82	$\nearrow$	$\simeq 94,03$

Exercices : 64, 66, 67, 70, 71, 72, 75 page 117[3] – 98 page 121[4] – 104, 105 page 124 ; 107 page 125 ; 110 page 126 et 113, 114 page 128[5] [Intervalle]

3. Étude de variations.
4. Obtention des valeurs de fonctions dérivées.
5. Type BAC.

2.2 Équation de la tangente

On veut déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant une fonction f au point d'abscisse a. Pour cela, on utilisera les deux résultats suivants (voir figure 1) :

— le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé $f'(a)$;

— cette tangente passe par le point $A\ (a\,;\ f(a))$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{3}{x}$.

On veut déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentant f au point d'abscisse 1.

— L'équation de cette tangente est de la forme $y = mx + p$.
Le coefficient directeur de la tangente est $f'(1)$.
Or, $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$ donc $f'(1) = 1 - \frac{3}{1^2} = 1 - 3 = -2$.
Le coefficient directeur de T est donc $m = -2$.

— L'équation de T est donc de la forme $y = -2x + p$.
Cette tangente passe par le point $A\ (1\,;\ f(1))$ avec $f(1) = 1 + \frac{3}{1} = 1 + 3 = 4$.
Elle passe donc par le point $A\ (1\,;\ 4)$. On a alors :

$$\begin{aligned} 4 &= -2 \times 1 + p \\ 4 &= -2 + p \\ 4 + 2 &= p \\ 6 &= p \end{aligned}$$

L'équation de la tangente T est donc $y = -2x + 6$.

Exercices : 84 page 118 ; 86, 90, 92, 94, 95 page 119[6] – 101 page 123 et 103 page 124[7] [Intervalle]

Références

[Intervalle] Collection Intervalle, Mathématiques, programme 2013, Term STMG, Nathan, 2013.

3, 4, 5

6. Équation de tangentes.
7. Problèmes.