Suites :
Rappels, récurrence

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Liste des algorithmes

---

1 Quelques rappels

1.1 Modes de génération d'une suite

Cas 1 : A l'aide d'une formule explicite

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n^2 + n - 2$.
  On a : $u_0 = -0^2+0-2 = 2$; $u_1 = -1^2+1-2 = -2$; $u_2 = -2^2+2-2 = -4$; $u_3 = -3^2+3-2 = -8$; etc.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = (-1)^n$.
  On a : $v_0 = (-1)^0 = 1$; $v_1 = (-1)^1 = -1$; $v_2 = (-1)^2 = 1$; $v_3 = (-1)^3 = -1$ et, plus généralement :
  - tous les termes d'indice pair sont égaux à 1 (ce qui peut se traduire par $v_{2n} = 1$) ;
  - tous les termes d'indice impair sont égaux à -1 (ce qui peut se traduire par $v_{2n+1} = -1$
- la fonction Python de l'algorithme 1 calcule le terme de rang n de la suite (u_n) :

Algorithme 1 Suite définie par une formule explicite

```
def u(n) :
    return u = -n^2 + n - 2
```

Remarque : La suite (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = -x^2+x-2$.

Cas 2 : Suites définies par récurrence

- Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2} \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

  On a :
  $u_1 = \frac{u_0+3}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $u_2 = \frac{u_1+3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$; $u_3 = \frac{u_2+3}{2} = \frac{\frac{7}{2}+3}{2} = \frac{13}{4}$; etc.
  la fonction Python de l'algorithme 2 calcule le terme de rang n de la suite (u_n) :

Algorithme 2 Suite définie par récurrence - 1

```
def u(n) :
    u = 5
    for i in range (1, n+1) :
        u = (u + 3)/2
    return u
```

- Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n + 2n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

  On a :
  $v_1 = -v_0+2\times 0 = -2+2\times 0 = -2$; $v_2 = -v_1+2\times 1 = -2+2\times 1 = 0$; $v_3 = -v_2+2\times 2 = 0+2\times 2 = 4$; etc.
  la fonction Python de l'algorithme 3 calcule le terme de rang n de la suite (u_n) :

Remarque : On a donc $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est la fonction définie par $g(x) = \frac{x+3}{2}$.

Exercices : 1, 2 page 13 et 25 page 29 [1] [Magnard]

1. Calcul de termes.

Algorithme 3 Suite définie par récurrence - 2

```
def v(n) :
    v = 2
    for i in range (1, n+1) :
        v = -v + 2(i - 1)
    return v
```

1.2 Suites arithmétiques

Activité : TP 3 page 46[2] [Magnard]

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, on montrera que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout entier n.
Dans ce cas, la constante trouvée est la raison de la suite.

Exemple : Soit u la suite définie par $u_n = \frac{2}{3} - \frac{5}{6}n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6}(n+1) - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}n\right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6}n - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}n = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

La suite est donc arithmétique de raison $-\frac{5}{6}$ et de premier terme $u_0 = \frac{2}{3}$.

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 5$ et $u_5 = 3$.
On a : $u_5 = u_3 + (5-3)\,r$ d'où $2r + 5 = 3$. On obtient $r = -1$.
De plus : $u_0 = u_3 - 3r = 5 - 3 \times (-1) = 8$.

Exercices : 27, 29 page 29[3] [Magnard]

1.3 Suites géométriques

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé raison de la suite.

Remarque : Pour montrer qu'une suite est géométrique, montre que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. La constante trouvée est alors la raison q.

2. Modèle de Malthus
3. Utiliser une suite arithmétique.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = \frac{3^{n+2} \times 3}{3^{n+2}} = 3$$

La suite est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 5 \times 3^2 = 45$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4^{n+2}}}{\frac{3^n}{4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} \times \frac{4^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3 \times 4^{n+1}}{4^{n+1} \times 4 \times 3^n} = \frac{3}{4}$$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3^0}{4^1} = \frac{1}{4}$.

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque : Plus généralement, si (u_n) est une suite géométrique de raison q et si n et p sont deux entiers naturels, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_5 = 100$ et $u_7 = 25$.
On a : $u_7 = u_5 \times q^2$ d'où $100q^2 = 25$ soit $q^2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
On a donc $q = \frac{1}{2}$ ou $q = -\frac{1}{2}$.
Comme $u_0 = u_5 \times q^{-5}$:
— Si $q = \frac{1}{2}$, $u_0 = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 100 \times 2^5 = 3200$.
— Si $q = -\frac{1}{2}$, $u_0 = 100 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = 100 \times (-2)^5 = -3200$.

Exercices : 26, 28 page 29[4] ; 5 page 13[5] ; 6 page 13[6] et 24 page 27[7] [Magnard]

2 La démonstration par récurrence

2.1 Principe du raisonnement par récurrence

Activité : 1 page 14[8] [Magnard]

Pour démontrer qu'une proposition dépendant d'un entier n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (où n_0 est un entier naturel donné), on procède en deux étapes :

Initialisation : On vérifie que la proposition est vraie au rang initial, c'est-à-dire lorsque $n = n_0$.

Hérédité : On montre que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire que SI elle est vraie à un rang $n \geq n_0$, ALORS elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

On peut alors conclure que la proposition est vraie pour tout $n \geq n_0$.

2.2 Exemples d'utilisation

2.2.1 Égalités

Exemple : Montrons par récurrence que, pour tout entier n non nul :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Initialisation : Il faut vérifier la proposition au rang 1.
$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, ce qui vérifie la proposition au rang 1.

4. Utiliser une suite géométrique.
5. Modéliser avec une suite
6. Utiliser des suites arithmétiques et géométriques
7. Étudier un phénomène d'évolution
8. Introduire le raisonnement par récurrence.

Hérédité : Soit n un entier non nul.

On suppose que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On veut montrer que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] \\ &= (n+1) \times \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

On a donc montré que, pour tout entier n non nul :pour tout entier n non nul :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercices : 1 page 17 ; 92, 93 page 33 et 130 page 38 [9] – 44, 45 page 30 ; 88, 89 page 33 et 148 page 42 [10] – 39, 40 page 30 et 91 page 33 [11] – 143 page 41 [12] [Magnard]

2.2.2 Inégalités

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$.

Initialisation : $u_0 = 2$. On a bien $u_0 \geq 2$.

Hérédité : On suppose que $u_n \geq 2$. Il faut montrer que $u_{n+1} \geq 2$.

Comme $u_n \geq 2$, $2u_n \geq 4$ puis $2u_n + 1 \geq 5$.

De plus, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$: $\sqrt{2u_n+1} \geq \sqrt{5}$.

Or, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$ d'où $u_{n+} \geq \sqrt{5} \geq 2$.

On a donc montré que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$.

Exercices : 41 page 30 et 94 page 33 [13] [Magnard]

2.2.3 Propriétés d'une suite

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1} \end{cases}$$

Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On va en fait montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

9. Sommes de termes.
10. Formes explicites de suites
11. Propriétés diverses.
12. Type BAC
13. Inégalités

Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{5}$. On a bien $u_1 \geq u_0$.

Hérédité : On suppose que $u_{n+1} \geq u_n$. Il faut montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.
Comme $u_{n+1} \geq u_n$, $2u_{n+1} \geq 2u_n$ puis $2u_{n+1} + 1 \geq 2u_n + 1$.
De plus, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,; +\infty[$: $\sqrt{2u_{n+1}+1} \geq \sqrt{2u_n+1}$.
Or, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+1}$ et $u_{n+2} = \sqrt{2u_{n+1}+1}$ d'où $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

On a donc montré que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

Remarque : Reprendre l'exemple précédent avec $u_0 = 3$ et montrer alors que la suite obtenue est décroissante. Ceci montre l'importance de l'étape d'initialisation...

Exercices : 42, 43 page 30 et 133 page 38 [14] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 5, 6

14. Variations de suites.