# Vecteurs, droites et plans de l'espace

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

## Table des matières

# Table des figures



# Liste des tableaux

# 1 Vecteurs de l'espace

**Activité :** Activité 2 page 278 [1] [Magnard]

## 1.1 Extension de la notion de vecteur à l'espace

**Définition :** Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace.
À tout point $M$ de l'espace on associe par la translation qui transforme $A$ en $B$, l'unique point $M'$ tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme (voir figure 1).
Cette translation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

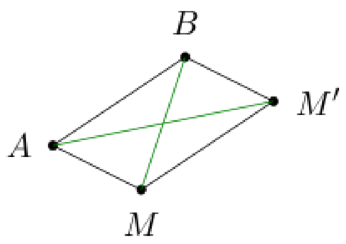



FIGURE 1 – Une translation

**Remarques :**

1. Il s'agit de la même définition que celle des vecteurs du plan. On retrouve donc la même caractérisation des vecteurs :
   Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
   — sa direction (celle de la droite $(AB)$) ;
   — son sens (de $A$ vers $B$) ;
   — sa norme (la longueur $AB$).
2. la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. On a donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

**Égalité de vecteurs :** (voir figure 2)

1. Lorsque la translation qui transforme $A$ en $B$ est la même que celle qui transforme $C$ en $D$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

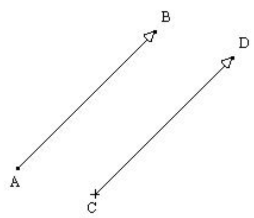



FIGURE 2 – Vecteurs égaux

## 1.2 Calcul vectoriel dans l'Espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés.

1. Utiliser les combinaisons linéaires de vecteurs.

**Propriété :** Relation de Chasles
Pour tous points $A$, $B$ et $C$ de l'Espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (voir figure 3).

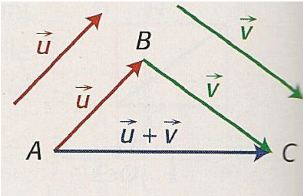



FIGURE 3 – Relation de Chasles

**Définition :** $A$ et $B$ désignent deux points distincts et $k$ un nombre réel non nul.
Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $C$ est le point de la droite $(AB)$tel que :
— Si $k > 0$, $AC = k \times AB$ et les points $B$ et $C$ sont du même côté de $A$ (figure 4).
— Si $k < 0$, $AC = (-k) \times AB$ et les points $B$ et $C$ sont de part et d'autre de $A$ (figure 5).


FIGURE 4 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 1


FIGURE 5 – Multiplication d'un vecteur par un réel – Cas 2

**Remarque :** Autrement dit :
— Si $k > 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, même sens et $AC = k \times AB$.
— Si $k < 0$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction, sens opposés et $AC = (-k) \times AB$

**Remarque :** Les règles de calculs sur les sommes de vecteurs et sur les multiplications de vecteurs par un réel sont les mêmes que sur les nombres.

**Définition :** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$et $\vec{v}$ s'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

**Exercices :** 1, 2 page 281et 36, 37 page 292 [2] – 9, 10, 11 page 285 et 49 page 292 [3] [Magnard]

**Module :** TP 1 page 304 [4] et TP 2 page 305 [5] [Magnard]

2. Représenter des combinaisons linéaires.
3. Exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire.
4. Barycentre d'un système de points pondérés.
5. Utilisations du barycentre d'un système de points pondérés.

# 2 Droites de l'espace

## 2.1 Colinéarité, alignement, parallélisme

**Définition :** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel $k$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$).

**Propriété :** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même direction.

**Applications :**
— Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
— Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Exercice :** 32 page 291 [6] – 46, 47, 48 page 292 et 86 page 295 [7] [Magnard]

## 2.2 Vecteur directeur d'une droite

**Définition :** Une droite de l'espace est définie :
— soit par la donnée de deux points distincts ;
— soit par la donnée d'un point un d'un vecteur non nul . Ce vecteur est alors appelé vecteur directeur de la droite (voir figure 6).

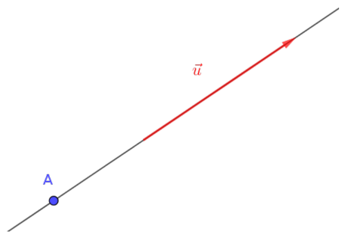



FIGURE 6 – Droite : un point et un vecteur directeur

**Remarque :** Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $d$, tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $d$.

**Propriété :** Caractérisation d'une droite
La droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

## 2.3 Positions relatives de deux droites

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
Les positions relatives possibles de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont résumées dans le tableau 1.

6. Vrai-Faux.
7. Colinéarité, applications.

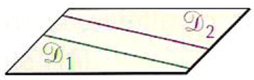
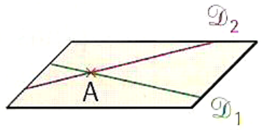
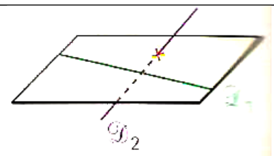
| Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ colinéaires | | $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non colinéaires | |
| $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et strictement parallèles | $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et confondues | $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et sécantes | $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non coplanaires |
| <br>pas de point commun | <br>tous les points sont communs | <br>un point commun unique | <br>il n'existe pas de plan contenant les deux droites |

TABLE 1 – Positions relatives de deux droites

**Remarques :** 1. On dit que deux droites sont coplanaires si elles sont inclues dans un même plan.

2. Attention ! Dans l'espace, il existe des droites qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.

3. Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

**Exercices :** 41 page 292[8] [Magnard]

# 3 Plans de l'Espace

## 3.1 Caractérisation d'un plan de l'Espace

**Définition :** Un plan de l'espace est défini :
- soit par la donnée de trois points non alignés ;
- soit par la donnée de deux droites sécantes :
- soit par la donnée d'un point un de deux vecteurs non colinéaires. Ces vecteurs sont alors appelés vecteurs directeurs du plan (voir figure 7).

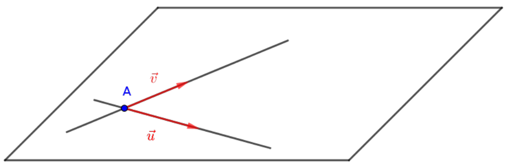



FIGURE 7 – Plan : un point et deux vecteurs directeurs

**Remarques :**

1. Un plan défini par trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ est noté $(ABC)$.

2. Un plan défini par un point $A$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est noté $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

8. Positions relatives de deux droites.

**Théorème :** Caractérisation vectorielle d'un plan (admis)

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires (voir figure 8).
   Un point $M$ est dans le plan $(A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que :
   $$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$
2. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de l'Espace non alignés.
   Un point $M$ est dans le plan $(ABC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que :
   $$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

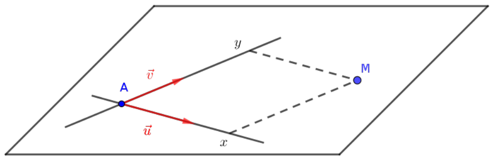



Figure 8 – Caractérisation vectorielle d'un plan

**Exercices :** 27 page 291 [9] – 3, 4 page 281 et 39, 40 page 292 [10] [Magnard]

## 3.2 Vecteurs coplanaires

**Définitions :**
1. On dit que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.
2. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
   Il existe quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ le sont.

**Remarques :**
1. Deux vecteurs (ou trois points) sont toujours coplanaires.
2. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles et, donc, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires. Par suite, si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont toujours coplanaires.

**Théorème :**
1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
   Alors, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que :
   $$\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$$
2. Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace, tels que $A$, $B$ et $C$ ne soient pas alignés.
   Alors, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels $x$ et $b$ tels que :
   $$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

**Remarque :** si trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires, on dit qu'ils forment une base de l'espace.

9. Utiliser les bons symboles
10. Caractérisation vectorielle d'un plan.

### 3.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
Les positions relatives possibles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont résumées dans le tableau 2

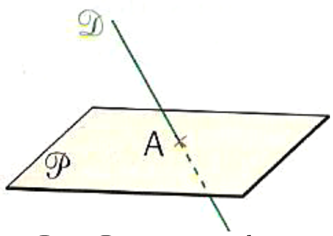
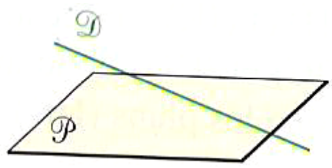
<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$</th></tr>
<tr><th>$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non coplanaires</th><th colspan="2">$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ non coplanaires</th></tr>
<tr><th>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants</th><th>$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$</th><th>$\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$.</th></tr>
<tr><td><br>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun</td><td><br>$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun</td><td><br>$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$</td></tr>
</table>

TABLE 2 – Positions relatives d'une droite et d'un plan

**Exercices :** 5, 6 page 283 et 42 page 292 [11] – 50 page 292 ; 51, 52 page 293 ; 82 page 295 et 120 page 301 [12] [Magnard]

### 3.4 Positions relatives de deux plans

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans.
Les positions relatives possibles de sont résumées dans le tableau 3.

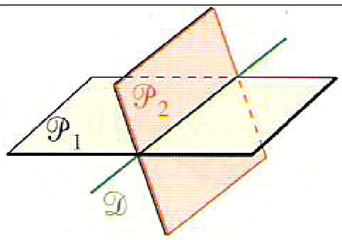
<table>
<tr><th colspan="3">Positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$</th></tr>
<tr><th rowspan="2">$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants</th><th colspan="2">$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ parallèles</th></tr>
<tr><th>$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ confondus</th><th>$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ strictement parallèles</th></tr>
<tr><td><br>leur intersection est la droite $\mathcal{D}$</td><td><br>leur intersection est un plan</td><td><br>leur intersection est vide</td></tr>
</table>

TABLE 3 – Positions relatives de deux plans

**Remarque :** Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite. Il suffit donc de déterminer deux points appartenant simultanément aux deux plans pour déterminer cette droite.

**Exercices :** 7 page 283 ; 26, 28 page 291et 43 page 292 [13] [Magnard]

### 3.5 Deux résultats supplémentaires sur le parallélisme

**Théorème 1 : (admis)** Si un plan $\mathcal{Q}$ coupe deux plans parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ alors les droites d'intersection sont parallèles (voir figure 9).

11. Positions relatives de droites et de plans.
12. Utilisation de la coplanarité.
13. Intersections de droites et de plans.

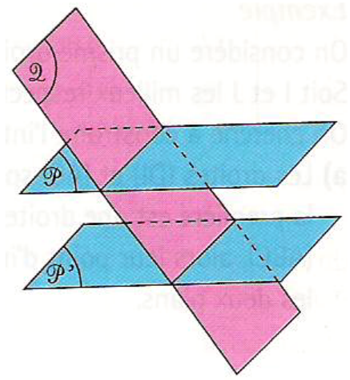



FIGURE 9 – Intersection avec deux plans parallèles

**Théorème 2 : (admis)** (aussi appelée « théorème du toit »)
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles. $\mathcal{P}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$ un plan contenant $\mathcal{D}'$ (voir figure 10).
Si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, leur droite d'intersection $\Delta$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

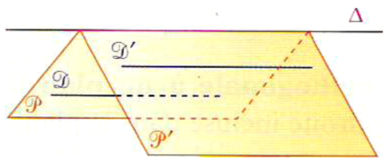



FIGURE 10 – Théorème du toit

**Activité :** Section d'un plan sur un cube (sur feuille polycopiée)
**Exercices :** 13 page 285 ; 44, 45 page 293 et 124 page 302[14] [Magnard]

# Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

14. Sections.