Limites de suites – Applications

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

Liste des algorithmes

En préliminaire au cours :

Exercice : 3 [1] page 13 [Magnard]

1 Rappels sur le sens de variation d'une suite

Définition :
- Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Remarque : On peut aussi définir une suite strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

Propriété 1 : Pour étudier les variations de la suite (u_n), il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors (u_n) est croissante.
- Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs.
- Si pour tout n on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout n on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarques :

1. On déduit de la Propriété 1 que pour une suite arithmétique :
   - Si $r > 0$, la suite est strictement croissante
   - Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante
2. On déduit de la Propriété 2 que pour une suite géométrique de premier terme strictement positif :
   - Si $0 < q < 1$, la suite est strictement décroissante
   - Si $q > 1$, la suite est strictement croissante
3. on admettra que si $q < 0$, la suite géométrique n'est pas monotone.

Exemples : 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 8$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 8 - \left(n^2 - 8\right) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 8 - n^2 + 8 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

De plus, comme n est un entier positif, $2n + 1 > 0$.
Par suite, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.
La suite (v_n) est à termes strictement positifs.
On a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{(n+1)-1}}}{\frac{2^n}{3^{n-1}}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{3^n} \times \frac{3^{n-1}}{2^n} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{3^{n-1}}{3^n} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Par suite, pour tout n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ donc la suite (v_n) est décroissante.

1. Représenter graphiquement une suite

2 Limite d'une suite

Activités : Activité 2[2] page 14 [Magnard]

2.1 Limite infinie

> **Définition :** On dit que la suite (u_n) admet comme limite $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (voir figure 1).
> On note alors :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

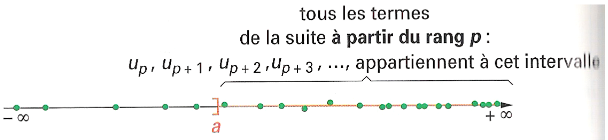

FIGURE 1 – Suite de limite $+\infty$

Exemple : Soit $u_n = n^2$.
On peut conjecturer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Pour le montrer en utilisant la définition, on doit trouver, pour tout $a > 0$, un rang p tel que, si $n \geq p$, $u_n > a$.
Résolvons cette inéquation :

$$\begin{array}{rcl} u_n & > & a \\ n^2 & > & a \end{array}$$

Comme le passage à la racine carrée conserve l'ordre pour les nombres positifs, on obtient $n \geq \sqrt{a}$.
Il suffit donc de prendre pour p le plus petit entier supérieur à $\sqrt{a}$ pour obtenir le résultat.
La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.
La fonction Python de l'algorithme 1 permet de déterminer ce rang p.

Algorithme 1 Suite de limite $+\infty$

```
def rangsuite (a) :
p = 1
u = 1
while (u ≤ a) :
    p = p + 1
    u = p^2
return p
```

Remarques :
1. On dit que ces suites sont divergentes.
2. On admettra que les suites de terme général $\sqrt{n}$; n ; n^2 et n^3 admettent comme limite $+\infty$.
3. On définit de manière analogue une suite de limite $-\infty$:

> **Définition :** On dit que la suite (u_n) admet comme limite $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
> On note alors :
> $$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Remarque : Les suites de terme général $-\sqrt{n}$; $-n$; $-n^2$ et $-n^3$ admettent comme limite $-\infty$.

Exercices : 6, 8 page 19 ; 49, 50, 52 page 30 ; 95 page 33 et 103 page 34[3] – 5 page 19 ; 46 page 30[4] [Magnard]

2. Prolifération bactérienne.
3. Conjectures
4. Suites tendant vers l'infini.

2.2 Limite finie

Définition : On dit que la suite (u_n) admet comme limite le nombre réel l si tout intervalle contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (voir figure 1).
On dit alors que (u_n) converge vers l et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

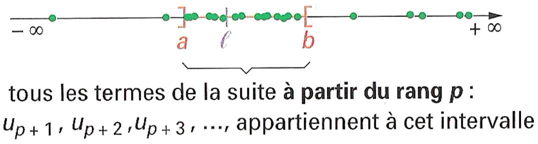

FIGURE 2 – Suite de limite finie l

Remarques : 1. Pour montrer qu'une suite est convergente, on peut se limiter aux intervalles centrés sur la limite l, c'est-à-dire les intervalles de la forme $[l-a\,;\,l+a]$ avec $a>0$.
2. Si elle existe, la limite l d'une suite est unique.
3. Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.
4. On admettra que les suites de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^3}$ ont pour limite zéro.

Exemples :

1. Soit $u_n = (-1)^n$
-1 et 1 sont les deux seules valeurs possibles pour la suite. La limite éventuelle de la suite ne pourrait donc être que -1 ou 1.
Or, aucun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]-2\,;\,0[$ ne contiennent tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (les termes d'indice pair sont dans $]0\,;\,2[$ et ceux d'indice impair dans $]-2\,;\,0[$.
Cette suite est donc divergente (en fait, elle n'a pas de limite).
2. Soit $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.
On peut conjecturer que la suite (v_n) converge vers 1.
Pour le montrer en utilisant la définition, on doit trouver, pour tout $a>0$, un rang p tel que, si $n \geq p$, $1-a \leq v_n \leq 1+a$.
Résolvons cette inéquation :

$$\begin{array}{rcl} 1-a & \leq v_n \leq & 1+a \\ 1-a & \leq 1+\dfrac{1}{n} \leq & 1+a \\ -a & \leq \dfrac{1}{n} \leq & a \end{array}$$

Comme $\dfrac{1}{n} > 0$, cela revient à $\dfrac{1}{n} \leq a$et, comme le passage à l'inverse change l'ordre pour les nombres positifs, $n \geq \dfrac{1}{a}$.
Il suffit donc de prendre pour p le plus petit entier supérieur à $\dfrac{1}{a}$ pour obtenir le résultat.
La suite (v_n) converge donc vers 1.
La fonction Python de l'algorithme 2 permet de déterminer ce rang p.

Exercice : 33, 34 page 29 ; 96 page 33 et 105 page 34 [5] – 7 page 19 ; 47, 51 page 30 et 53 page 31 [6] [Magnard]

5. Conjectures
6. Suites convergentes.

Algorithme 2 Suite convergente

```
def rangsuite (a) :
p = 1
v = 2
while (v > 1 + a) or (v < 1 - a) :
    p = p + 1
    v = 1 + 1/p
return p
```

3 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, l et l' désignent deux nombres réels.

3.1 Limite d'une somme

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

TABLE 1 – Limite d'une somme

Remarque : « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail les suites pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}+2\right) = ?$

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty\\ \lim_{n\to+\infty} 2 = 2\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}+2\right) = +\infty$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2-n\right) = ?$

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\\ \lim_{n\to+\infty} (-n) = -\infty\end{array}\right\} \text{On a une forme indéterminée}$$

Cette F.I. sera levée à la sous-section 3.2.

3.2 Limite d'un produit

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty} \left(-3n^2\right) = ?$

$$\left.\begin{array}{c}\lim_{n\to+\infty} -3 = -3\\ \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty}\left(-3n^2\right) = -\infty$$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
		Il s'agit de la règle des signes								

TABLE 2 – Limite d'un produit

2. $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2-n\right) =?$
   On a déjà vu à la sous-section 3.1 que cette limite présente une forme indéterminée. Or, si $n \neq 0$, $n^2-n = n^2\left(1-\frac{n}{n^2}\right) = n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$ et :

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n} = 1\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \left(n^2-n\right) = +\infty$$

   On a levé l'indétermination.

Remarque : Pour lever une indétermination de la forme « $\infty - \infty$ », il suffit souvent de mettre en facteur le terme de plus haut degré.

3.3 Limite d'un quotient

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

$\lim_{x\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to+\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	0
$\lim_{x\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.
			règles des signes		il faut prendre en compte le signe de v_n		

TABLE 3 – Limite d'un quotient

Exemples : 1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{2n^2-1} =?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} -5 = -5 \\ \lim_{n\to+\infty} 2n^2-1 = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{2n^2-1} = 0$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-2}{3n-1} =?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{n\to+\infty} n-2 = +\infty \\ \lim_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty\end{array}\right\} \text{On a une forme indéterminée}$$

   On va mettre en facteur les termes de plus haut degré :

$$\frac{n-2}{3n-1} = \frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1-\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{2}{n}=1\\ \lim_{n\to+\infty} 3-\frac{1}{n}=3\end{array}\right\}\text{ donc }\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{3n-1}=\frac{1}{3}$$

Remarque : Pour lever une indétermination de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », il suffit souvent de mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, puis réduire la fraction obtenue.

Exercices : 9, 10 page 21 et 54, 56, 57 page 31 [7] – 11, 12 page 21 et 59, 60, 61, 62 page 31 [8] – 98 page 33 [9] – 109 page 34 [10] [Magnard]

4 Limites par comparaison

Activité : Activité 3 page 15 [11] [Magnard]

4.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites et a n_0 un entier naturel.

1. Si, pour $n \geq n_0$, on a $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si, pour $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration (exigible) :
1. Soit a un nombre réel.
Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier p tel que l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contienne tous les termes de (v_n) à partir de l'indice p.
On note N le plus grand des nombres entiers n_0 et p.
pour $n \geq N$, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes v_n et, de plus, $u_n \geq v_n$.
Par suite, pour $n \geq N$, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes u_n.
Cette démonstration étant valable pour tout nombre réel a, on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit a un nombre réel.
Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, il existe un entier p tel que l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contienne tous les termes de (v_n) à partir de l'indice p.
On note N le plus grand des nombres entiers n_0 et p.
pour $n \geq N$, l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes v_n et, de plus, $u_n \leq v_n$.
Par suite, pour $n \geq N$, l'intervalle $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes u_n.
Cette démonstration étant valable pour tout nombre réel a, on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Soit $u_n = \sqrt{n^2+1}$
Pour tout entier n, $n^2+1 \geq n^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, elle conserve l'ordre donc $\sqrt{n^2+1} \geq \sqrt{n^2}$.
Comme n est un entier positif, $\sqrt{n^2} = n$.
On a donc $\sqrt{n^2+1} \geq n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercices : 13, 14 page 23 et 63, 64, 65 page 31 [12] – 100 page 33 [13] – 21, 22 page 26 [14] [Magnard]

4.2 Théorème des gendarmes

Théorème 2 : Théorème dit « des gendarmes » (admis)
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ; n_0 un entier naturel et l un réel.
Si, pour $n \geq n_0$, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

7. Limites « simples ».
8. Formes indéterminées.
9. Vrai-Faux.
10. Avec une suite intermédiaire.
11. Découvrir les propriétés sur les limites.
12. Théorème de comparaison.
13. Forme conjuguée.
14. Étudier la convergence d'une suite.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Comme $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $\sqrt{n} > 0$, on a :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, la suite (u_n) converge vers zéro.

Exercices : 15, 16 page 23 et 67, 68, 69, 70 page 31 [15] – 97 page 33 [16] – 99 page 33 [17] [Magnard]

5 Cas des suites géométriques et des suites monotones

5.1 Suites géométriques

Lemme : Inégalité de BERNOULLI

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier naturel n,on a :

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Démonstration (exigible) :

Montrons par récurrence que $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang zéro.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que $(1+a)^n \geq 1 + na$ et on veut monter que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a$.

$$\begin{array}{rcl}
(1+a)^n & \geq & 1+na \\
(1+a)^n \times (1+a) & \geq & (1+na) \times (1+a) \;\; \text{car } 1+a > 0 \\
(1+a)^{n+1} & \geq & (1+na)(1+a) \\
(1+a)^{n+1} & \geq & 1+na+a+na^2 \\
(1+a)^{n+1} & \geq & 1+(n+1)\,a+na^2
\end{array}$$

Comme $na^2 \geq 0$, on a donc $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,a$.

On a donc montré que, pour tout n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Propriété : Soit q un réel différent de zéro et de 1.

1. Si $q > 1$, la suite de terme général (q^n) admet comme limite $+\infty$ (elle est donc divergente).
2. Si $-1 < q < 1$, la suite de terme général (q^n) a pour limite zéro.
3. Si $q \leq -1$, la suite de terme général (q^n) n'a pas de limite (elle est donc divergente).

Démonstration partielle (exigible) :

1. Comme $q > 1$, on peu noter $q = 1 + a$, avec $a > 0$.
En utilisant l'inégalité de BERNOULLI, on a, pour tout entier naturel n,$q^n \geq 1 + na$.
De plus, comme $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} (1 + na) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2. On va traiter deux cas :

- Si $0 < q < 1$: On pose $p = \frac{1}{q}$. On a donc $p > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} p^n = +\infty$.
Comme $q = \frac{1}{p}$, on a $q^n = \left(\frac{1}{p}\right)^n = \frac{1}{p^n}$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $-1 < q < 0$: On pose $s = -q$. On a donc $0 < s < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} s^n = 0$.
Comme $q = -s$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

3. Ce résultat est admis.

Exemples :

15. Théorème des gendarmes.
16. Choix de méthode.
17. Vrai-Faux.

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 4.
   On a donc $u_n = -3 \times 4^n$.
   Comme $4 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 5^n - 3^n$.
   On obtient une forme indéterminée. On va mettre en facteur le terme prépondérant :
   $$w_n = 5^n \left(1 - \frac{3^n}{5^n}\right) = 5^n \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$
   Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 1$.
   Comme $5 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
4. Soit (t_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.
   On note $S_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$.
   On a :
   $$S_n = t_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 5 \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{20}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$
   Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{20}{3}$.

Exercices : 17, 18 page 25 et 71, 73, 74, 78 page 32 [18] – 75, 77 page 32 et 114 page 35 [19] – 116 page 35 et 117, 118, 119 page 36 [20] – 24 page 27 ; 121, 123 page 36 ; 124, 126 page 37 et 146 page 41 [21] – 111 page 35 [22] – 131 page 38 et 144 page 41 [23] [Magnard]

5.2 Suites monotones

Définition : On dit que la suite (u_n) est majorée par M si, pour tout n, $u_n \leq M$.
On dit que la suite (u_n) est minorée par m si, pour tout n, $u_n \geq m$.
On dit que la suite (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :
1. Si la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, on peut utiliser le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ pour montrer que (u_n) est majorée, minorée ou bornée.
2. Si la suite (u_n) est définie par récurrence, on utilisera généralement le raisonnement par récurrence pour montrer que la suite (u_n) est bornée (respectivement majorée ou minorée).

Propriété 1 :
— Si (u_n) est une suite croissante non majorée alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
— Si (u_n) est une suite décroissante non minorée alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration (partielle) :
Si la suite (u_n) est non majorée, alors, pour tout $a > 0$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} > a$.
De plus, comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq n_0$, $u_n > a$.
Par suite, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]a ; +\infty[$. La suite (u_n) admet donc comme limite $+\infty$.

Exercice : En vous inspirant de la démonstration précédente, montrer que toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exercice : 21 page 26 [24] [Magnard]

18. Limite de suite géométrique.
19. Avec une forme indéterminée.
20. Somme de termes.
21. Étudier des phénomènes d'évolution.
22. Dépassement de seuil.
23. Détermination de limite - Bilan.
24. Étudier la convergence d'une suite.

Propriété 2 (admise) : — Si (u_n) est une suite croissante et majorée alors elle converge.
— Si (u_n) est une suite décroissante et minorée alors elle converge.

Remarque : Cette propriété prouve juste que la suite est convergente. Elle ne donne pas la limite. Pour déterminer cette limite, on faudra utiliser une autre méthode.

Exercices : 79, 80, 85 page 32 ; 106, 107, 108 page 34 et 110, 113 page 35 [25] – 81 page 32 ; 101 page 34 et 149 page 42 [26] – 23 page 27 ; 125 page 37 ; 133 page 38 et 145 page 41 [27] [Magnard]

Module : Exercice 158 page 43 [28] et TP 1 page 44 [29] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10

25. Convergence des suites monotones.
26. Vrai-Faux.
27. Étudier des phénomènes d'évolution.
28. Convergence de la méthode de Héron
29. Application de la méthode de Newton.