Repérage dans l'espace
Représentation paramétrique de droites

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

---

1 Repérage dans l'Espace

Activité : Activité 4 page 279 [1] [Magnard]

1.1 Bases de l'espace

Définition : On dit que le triplet de vecteurs $\left(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ est une base de l'espace si chacun des trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

Remarque : Cela signifie que ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Propriété : Soit $\left(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ une base de l'espace.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
Il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées de ce point M. Par conséquent :
Il existe un unique triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que $\vec{u} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} + c\,\vec{k}$.
Ce triplet est appelé coordonnées de $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque : x est appelé abscisse, y est appelé ordonnée et z est appelé cote.

Exercices : 12, 13 page 292 [2] – 14, 15 page 287 ; 53, 54, 56, 58, 63 page 293 et 79, 80 page 295 [3] [Magnard]

1.2 Repères de l'espace

Définition : On appelle repère de l'espace tout quadruplet $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ où O est un point de l'Espace et où $\left(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ est une base de l'espace.
Si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit orthogonal.
Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$), on dit que le repère est orthonormé.

Propriété : Soit $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soit M un point de l'espace.
Il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ (voir figure 1).
Ce triplet est appelé coordonnées de M. On note $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$.

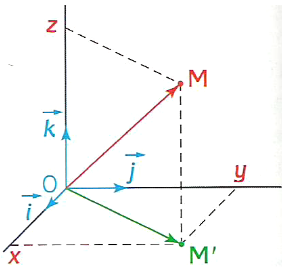


FIGURE 1 – Coordonnées dans un repère de l'Espace

Remarque : x est appelé abscisse, y est appelé ordonnée et z est appelé cote.

1. Utiliser les coordonnées dans l'espace.
2. Décomposer un vecteur dans une base par lecture graphique.
3. Déterminer une base de l'espace par le calcul.

1.3 Calcul sur les coordonnées

Les résultats sont identiques à ceux du plan.
On a, par exemple :

- Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  - les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  - les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors :
  - les coordonnées de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$
  - Si k est un réel, les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{u}$ sont : $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k\times a \\ k\times b \\ k\times c \end{pmatrix}$
- On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé.
  - Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors sa norme est :
  $$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
  - Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  $$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Exercices : 31 page 291 [4] – 59, 60 page 293 [5] – 61, 62 page 293 et 81 page 295 [6] – 20, 22 page 294 ; 65, 66, 67, 68, 70 page 294 ; 82, 84 page 295 et 120 page 301 [7] [Magnard]

2 Représentations paramétriques d'une droite de l'espace

Activité : Activité 5 page 279 [8] [Magnard]

2.1 Définition

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'Espace.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\ (x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur *directeur* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M\ (x\,;\,y\,;\,z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

4. Colinéarité ou non.
5. Calculs sur les coordonnées.
6. Bases de l'espace.
7. Étudier des problèmes de configurations dans l'espace.
8. Découvrir les représentations paramétriques de droites de l'espace.

Définition : On appelle représentation paramétrique ou système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ par un point $A\ (x_A\,;\, y_A\,;\, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le système :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Le réel t est appelé paramètre.

Remarques :

1. Un point M est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées de M vérifie le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
2. Réciproquement, si la droite Δ admet comme équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$, cette droite passe par le point $M_0\ (x_0\,;\, y_0\,;\, z_0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
3. On peut trouver une autre représentation paramétrique de la même droite en changeant le point et/ou le vecteur directeur de la droite.

Exercices : 29, 30, 33 page 291 [9] – 16, 17, 19 page 287 ; 71, 72 74, 75, 76, 77, 78 page 294 et 117 page 301 [10] – 99, 101, 102 page 297 ; 107 page 298 et 118 page 301 [11] [Magnard]

2.2 Intersection de deux droites

Les résultats concernant les positions relatives de deux droites de l'Espace sont rappelées dans le tableau 1.

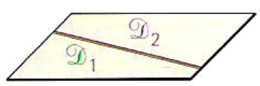
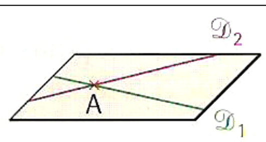
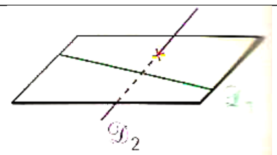
Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$			
$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ colinéaires		$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non colinéaires	
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et strictement parallèles	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et confondues	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ coplanaires et sécantes	$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non coplanaires
 pas de point commun	 tous les points sont communs	 un point commun unique	 il n'existe pas de plan contenant les deux droites

TABLE 1 – Positions relatives de deux droites

Remarque : $\mathcal{D}_1$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u_1}$ et $\mathcal{D}_2$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u_2}$.

- Si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires :
  - S'il existe un point de $\mathcal{D}_1$ qui n'est pas sur $\mathcal{D}_2$, elles sont strictement parallèles ;
  - S'il existe un point qui est sur $\mathcal{D}_1$ et sur $\mathcal{D}_2$, elles sont confondues.
- Si $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires :
  - Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas de point commun, elles sont non coplanaires ;
  - Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un point commun, elles sont sécantes.

9. Vrai-faux.
10. Déterminer une représentation paramétrique de droite.
11. Configurations de l'espace

Exercice résolu : Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'Espace, on considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1\ :\ \begin{cases} x=-1+2t \\ y=4t \\ z=5-3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \mathcal{D}_2\ :\ \begin{cases} x=-6t+8 \\ y=-12t+1 \\ z=9t-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad \mathcal{D}_3\ :\ \begin{cases} x=t+6 \\ y=3t-1 \\ z=-2t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ puis de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\-12\\9\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{v}=-3\overrightarrow{u}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont *parallèles*.
Reste à déterminer si les deux droites sont *strictement parallèles* ou *confondues*.
Le point $A\,(-1\,;\,0\,;5)$ est un point de $\mathcal{D}_1$.

$$A\in\mathcal{D}_2 \iff \begin{cases} -6t+8=-1 \\ -12t+1=0 \\ 9t-2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{1}{12} \\ t=\frac{7}{9} \end{cases}$$

Ce qui est impossible. Par suite, $A\notin\mathcal{D}_2$.
Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont donc *strictement parallèles*.

Positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$: Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$ est $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont soit *sécantes*, soit *non coplanaires*.
On va donc chercher un éventuel point d'intersection à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.

$$M\ (x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_3 \iff \text{il existe deux réels } t \text{ et } s \text{ tels que } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=4t \\ z=5-3t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=s+6 \\ y=3s-1 \\ z=-2s+2 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} -1+2t=s+6 \\ 4t=3s-1 \\ 5-3t=-2s+2 \end{cases} \iff \begin{cases} s=2t-7 \\ 4t=3\,(2t-7)-1 \\ 5-3t=-2\,(2t-7)+2 \end{cases} \iff \begin{cases} s=2t-7 \\ 4t=6t-22 \\ 5-3t=-4t+16 \end{cases} \iff \begin{cases} s=15 \\ t=11 \\ t=11 \end{cases}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont donc *sécantes* et leur point d'intersection a comme coordonnées :

$$\begin{cases} x=-1+2\times 11=21 \\ y=4\times 11=44 \\ z=5-3\times 11=-28 \end{cases}$$

Remarques :
1. Attention ! Lors de la recherche d'un éventuel point d'intersection entre deux droites, il faut *absolument* donner deux noms différents aux deux paramètres.
2. Si les droites avaient été non coplanaires, on aurait, lors de la résolution du système, trouvé deux valeurs différentes pour t (ou s), ce qui est impossible.

Exercices : 23, 25 page 289 ; 88, 90, 92, 93, 95, 96 page 296 et 119 page 301 [12] – 98 page 296 [13] – 100, 101 page 297 ; 105, 106, 108 page 298 [14] – 127 page 303 [15] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

2, 3, 4, 6

12. Positions relatives de droites de l'espace.
13. Intersection d'une droite et d'un plan.
14. Étude de configurations.
15. Une Section.