# Repérage
# Problèmes de géométrie

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2019/2020

## Table des matières



## Table des figures

En complément de ce chapitre, et pour aborder les exercices, on pensera à utiliser les rappels de géométrie des pages 354 à 359 du manuel. [Magnard]

# 1 Complément de géométrie : Notion de projeté orthogonal

**Questions flash :** Exercices 13 page 122 [1] – 14 page 122 [2] – 17, 18 page 122 [3] [Magnard]

**Exercices :** 20, 21 page 122 ; 24 page 123 ; 44, 47 page 124 et 84 page 127 [4] – 19 page 122 et 82 page 127 [5] [Magnard]

**Exercices :** 22, 23 page 122 et 25 page 123 [6] – 45, 46 page 124 [7] [Magnard]

**Exercices :** 51, 52 page 125 et 71 page 126 [8] [Magnard]

**Activité :** Activité 2 page 117 [9] [Magnard]

**Définition :** Soit $d$ une droite et $M$ un point non situé sur $d$ (voir figure 1).
On appelle projeté orthogonal de $M$ sur la droite $d$, le point $H$ situé à l'intersection de la droite $d$ et de la perpendiculaire à $d$ passant par $M$.

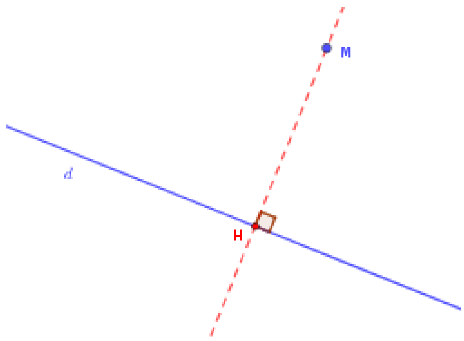



FIGURE 1: Projeté orthogonal d'un point sur une droite

**Question flash :** Exercice 12 page 122 [10] [Magnard]

**Propriété :** Soit $d$ une droite, $M$ un point non situé sur $d$ et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $d$ (voir figure ).
La longueur $MH$ est la plus courte distance entre le point $M$ et un point de la droite $d$. La longueur $MH$ est appelé distance du point $M$ à la droite $d$.

**Démonstration :**
Soit $K$ un point quelconque de $d$, distinct de $H$.
Le triangle $MHK$ est rectangle en $H$, donc, d'après le théorème de PYTHAGORE, on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$.
Comme $HK \neq 0$, on a donc $MK^2 > MH^2$ et, par suite, $MK > MH$.

**Exercices :** 2, 4, 5 page 120 ; 28, 30, 31 page 123 et 70 page 127 [11] [Magnard]

1. Théorème de PYTHAGORE
2. Théorème de THALÈS
3. Trigonométrie dans un triangle rectangle
4. Applications du théorème de PYTHAGORE
5. Nature d'un quadrilatère
6. Applications du théorème de Thalès
7. Triangles semblables
8. Trigonométrie dans un triangle rectangle.
9. Plus court.
10. Projeté orthogonal.
11. Utiliser le projeté orthogonal

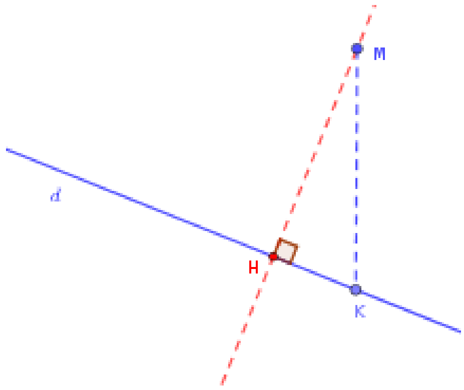



FIGURE 2: Distance d'un point à une droite

**Définition :** Soit $ABC$ un triangle quelconque (voir figure ).
On appelle hauteur issue de $A$ la droite qui passe par le sommet $A$ et qui coupe perpendiculairement le côté $[BC]$ au point $H$, projeté orthogonal de $A$.
La longueur $AH$ est donc la distance du point $A$ à la droite $(BC)$.

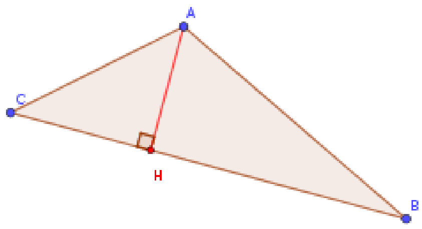



FIGURE 3: Hauteur dans un triangle

**Exercices :** 7 page 121 ; 26, 27 page 123 ; 49, 50 page 125 ; 83 page 127 et 92, 94 page 128 [12] – 43 page 124 [13] [Magnard]

# 2 Géométrie dans un repère

## 2.1 Repères – coordonnées d'un point

**Définition :** Définir un repère du plan, c'est choisir 3 points non alignés dons un ordre précis : $O$, $I$, $J$.
On note ce repère $(O, I, J)$ (voir figure 4) et :
- le point $O$ est l'origine du repère ;
- la droite $(OI)$ est l'axe des abscisses et le point $I$ donne l'unité sur cet axe ;
- la droite $(OJ)$ est l'axe des ordonnées et le point $J$ donne l'unité sur cet axe.

**Remarques :**
1. L'axe des abscisses est souvent horizontal, mais ce n'est pas une obligation.
2. Si $(OI) \perp (OJ)$ (c'est-à-dire si le triangle $OIJ$ est rectangle en $O$), on dit que le repère $(O, I, J)$ est orthogonal (voir figure 5a).
3. Si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$ (c'est-à-dire si le triangle $OIJ$ est rectangle et isocèle en $O$), on dit que le repère $(O, I, J)$ est orthonormé (voir figure 5b).

12. Distances, aires, volumes.
13. Nature d'un quadrilatère.

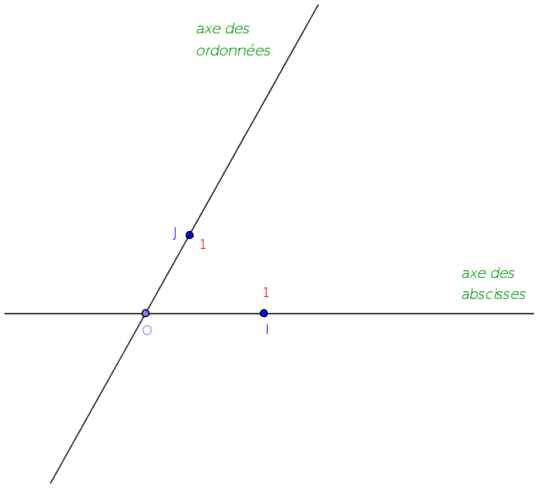
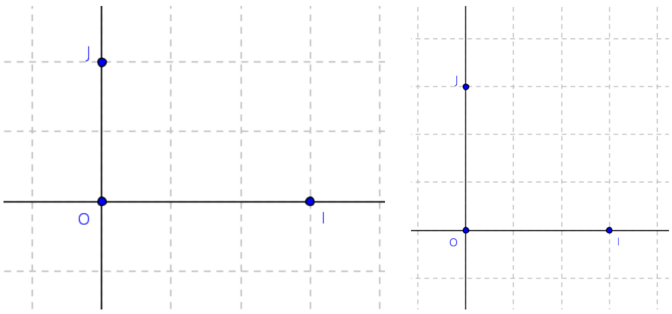



FIGURE 4: Un repère quelconque




(a) Repère orthogonal (b) repère orthonormé

FIGURE 5: Des repères particuliers

**Définition :** Soit $(O, I, J)$ un repère quelconque du plan et $M$ un point du plan.
Soit $P$ le point d'intersection entre la parallèle à $(OJ)$ passant par $M$ et l'axe des abscisses $(OI)$.
Soit $Q$ le point d'intersection entre la parallèle à $(OI)$ passant par $M$ et l'axe des ordonnées $(OJ)$. (voir figure )
L'abscisse $x_M$ du point $M$ est l'abscisse du point $P$ sur la droite $(OI)$.
L'ordonnée $y_M$ du point $M$ est l'abscisse du point $Q$ sur la droite $(OJ)$.
Le couple $(x_M\,;\,y_M)$ s'appelle coordonnées du point $M$ dans le repère $(O, I, J)$.

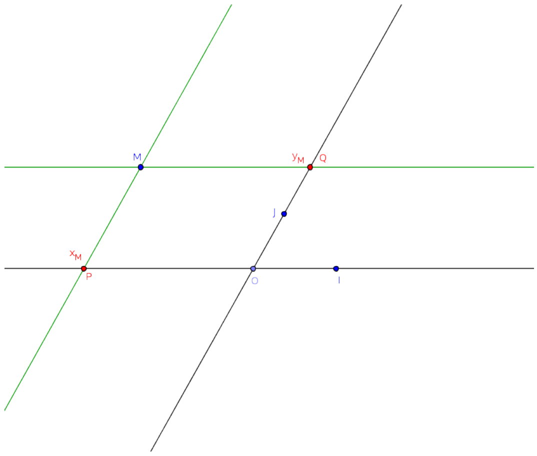



FIGURE 6: Coordonnées d'un point

**Exemples :** Dans le repère $(O, I, J)$ de la figure 7, on a : $O\ (0\,;\,0)$ ; $I\ (1\,;\,0)$ ; $J\ (0\,;\,1)$ ; $A\ (3\,;\,2)$ ; $B\ (-2\,;\,3)$ et $C\ (-1\,;\,-2)$.

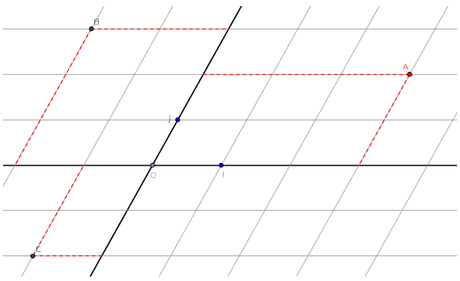



FIGURE 7: Coordonnées – exemples

**Exercice :** 88 page 128 [14] [Magnard]

## 2.2 Coordonnées du milieu d'un segment

**Théorème :** (admis)
Soit $(O, I, J)$ un repère du plan et $A\ (x_A\,;\,y_A)$ et $B\ (x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.
Les coordonnées du milieu $K$ de $[AB]$ sont :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

**Question flash :** Exercice 16 page 122 [15] [Magnard]

**Exercices :** 32, 36 page 123 et 61, 62 page 125 [16] – 69 page 126 [17] [Magnard]

14. Changement de repère
15. Milieu d'un segment
16. Milieu d'un segment.
17. Algorithmique.

## 2.3 Distances dans un repère orthonormé

**Théorème :** Dans un repère orthonormé, on considère deux points $A\ (x_A\,;\, y_A)$ et $B\ (x_B\,;\, y_B)$.
La distance entre les points $A$ et $B$ est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

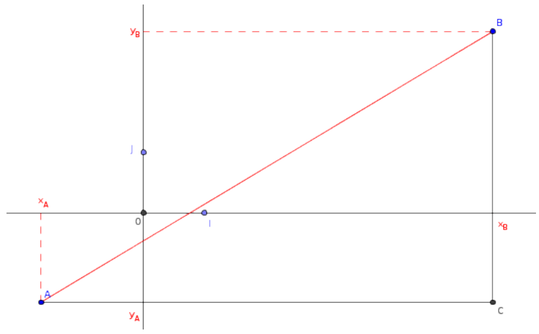



FIGURE 8: Distance dans un repère orthonormé

**Démonstration**

On suppose que $x_B > x_A$ et que $y_B > y_A$ (voir figure 8)

On note $C$ le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$.

Comme $(BC) \parallel (OJ)$ et $(AB) \parallel (OI)$, le triangle $ABC$ est rectangle en $C$.

D'après le théorème de PYTHAGORE, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Or, $AC = x_B - x_A$ et $BC = y_B - y_A$ donc :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

et, comme $AB$ est positif :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Remarque :** Attention ! Ce théorème est uniquement valable dans un repère orthonormé !

**Question flash :** Exercice 15 page 122 [18] [Magnard]

**Exercices :** 33, 34, 35 page 123 et 55, 56 page 125 [19] – 57, 58, 59, 63 et 65 page 125 ; 66, 72 page 126 ; 80 page 127 et 97 page 129 [20] – 64 page 125 et 81 page 127 [21] – 68 page 126 [22] – 79 page 127 et 86 page 128 [23] [Magnard]

# Références


[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

2, 3, 5, 6


18. Calcul de distances.
19. Distances, applications.
20. Nature d'un triangle, d'un quadrilatère.
21. Utilisation du projeté orthogonal
22. Trigonométrie.
23. Avec des cercles.