Dérivation
Convexité

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

1 Rappels de dérivation

1.1 Dérivation en un point

Définition : Soit $a \in I$.
Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est dérivable en a.
Ce nombre est alors appelé nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.
On a donc :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarques : 1. Le taux d'accroissement de f en a peut aussi s'écrire $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
La fonction f est dérivable en a si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers un nombre fini lorsque x tend vers a. Dans ce cas, on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2. Le taux d'accroissement de f en a correspond à un coefficient directeur d'une sécante à f en a(voir figure 1). Si la fonction f est dérivable en a, alors sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse a et $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.

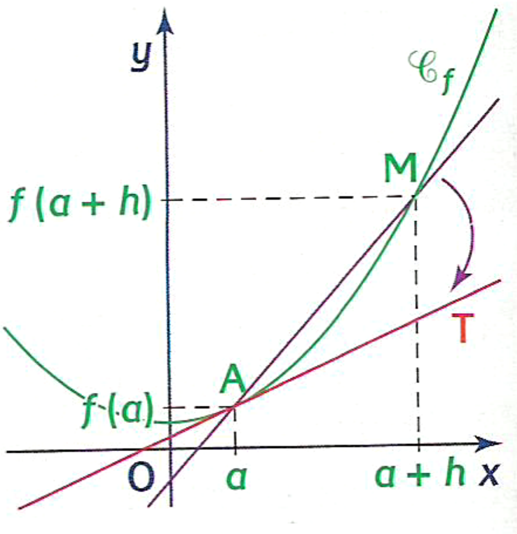

FIGURE 1 – Nombre dérivé et tangente

Exercice : Exercice 1 page 137[1] [Magnard]

1.2 Équation de la tangente à une courbe

On reprend la figure 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite :
- de coefficient directeur $m = f'(a)$;
- passant par $A\ (a\,;\,f(a))$.

1. Déterminer un nombre dérivé.

On obtient le résultat suivant :

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet comme équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice : Exercice 2 page 137[2] [Magnard]

1.3 Dérivées des fonctions usuelles

Les résultats sont regroupés dans le tableau 1.

fonction f	dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ (k constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier >0)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier >0)	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles.

1.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Les résultats sont regroupés dans le tableau 2

	Opération	**Dérivée**	**Conditions d'utilisation**
Somme de deux fonctions	$u+v$	$u'+v'$	u et v dérivables sur I
Multiplication par une constante	ku	ku'	u dérivable sur I
Produit de deux fonctions	uv	$u'v+uv'$	u et v dérivables sur I
Inverse d'une fonction	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$
Quotient de deux fonctions	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	u et v dérivables sur I Pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$

TABLE 2 – Opérations sur les fonctions dérivées.

2. Déterminer une équation de tangente.

Exercice : Exercice 3 page 137[3] [Magnard]

1.5 Dérivée et sens de variation

Théorème fondamental (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Remarques :
1. On a aussi : $f'(x) > 0$ donne f *strictement* croissante, etc.
2. Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit donc d'étudier le signe de sa dérivée. Néanmoins, dans certains cas simples (trinôme du second degré, fonctions affines...), ceci n'est pas toujours nécessaire.

Exercice : Exercice 4 page 137[4] [Magnard]

2 Composée d'une fonction u par une fonction v

Activité : Activité 1 page 138[5] [Magnard]

2.1 Définition - exemples

Définition : Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J, tels que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.
On peut résumé la situation par le schéma suivant :

$$\begin{array}{rl} v \circ u : I \longrightarrow & J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \xrightarrow{u} & u(x) \xrightarrow{v} v(u(x)) \end{array}$$

Remarques :

1. Le symbole $\circ$ se lit « rond ».
2. La condition « pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$ » permet d'assurer que $u(x)$ est bien dans l'ensemble de définition de v, donc que la deuxième partie du schéma est possible.
3. Attention : pour déterminer $v \circ u$, dans le schéma, il faut commencer par u.

Exemples : On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1. On va d'abord étudier $v \circ u(x) = v(u(x))$
   On a donc le schéma suivant :
   $$v \circ u : x \xrightarrow{u} u(x) = 2x + 1 \xrightarrow{v} v(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$$
   On a donc $v \circ u(x) = \sqrt{2x + 1}$.
   Déterminons l'ensemble de définition de cette fonction. Il faut que $2x + 1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}$.
   La fonction $v \circ u$ est donc définie sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3. Calculer des dérivées.
4. Étudier des tableaux de signes.
5. Voir des fonctions... à l'intérieur d'autres fonctions !

2. On va maintenant étudier $u \circ v(x) = u(v(x))$
   On a donc le schéma suivant :

$$u \circ v : x \xrightarrow{v} v(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{u} u\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1$$

   On a donc $u \circ v(x) = 2\sqrt{x} + 1$.
   Déterminons l'ensemble de définition de cette fonction. Il faut que $x \geq 0$.
   La fonction $u \circ v$ est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

Remarque : On peut voir grâce à cet exemple qu'en général $v \circ u \neq u \circ v$. Ces deux fonctions peuvent même avoir des ensembles de définition très différents.

Exercices : 1, 2 page 141 et 41, 42, 43, 44, 45 page 154 [6] – 3, 4 page 141 et 47, 49 page 154 [7] [Magnard]

2.2 Dérivation d'une fonction composée

Théorème : (admis)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$
Alors la fonction g définie par $v \circ u$ est dérivable sur I et :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Autrement dit, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Exemples : 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)^4$.
   On a $f = v \circ u$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^4$.
   Comme $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 4x^3$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2 \times 4(2x+1)^3 = 8(2x+1)^3$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+1}$.
   On a $g = v \circ u$ avec $u(x) = -x^2 + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Comme $u'(x) = -2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = -2x \times \mathrm{e}^{-x^2+1} = -2x\mathrm{e}^{-x^2+1}$$

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.
   On a $g = v \circ u$ avec $u(x) = 1 + x^2$ et $f(x) = \sqrt{x}$.
   u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$; v est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

.

Quelques cas particuliers importants : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Pour tout entier naturel n non nul, la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- Si pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$, La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.
- Si pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, La fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- La fonction e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

6. Étudier un schéma de composition.
7. Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée.

Exercices : 5 page 143 ; 27, 28 page 153 et 53, 54, 55, 56, 58 page 155 [8] – 8 page 143 ; 21, 22 page 150 ; 61, 63, 64 page 155 ; 87, 89 page 158 et 130 page 163 [9] – 133 page 164 [10] – 134 page 164 [11] [Magnard]

Module : TP1 page 166 [12] et TP2 page 167 [13] [Magnard]

3 Convexité – Point d'inflexion

3.1 Notion de convexité, de concavité

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit A et B deux points de la courbe $\mathcal{C}$.
On dit que la droite (AB) est une sécante à la courbe $\mathcal{C}$. (voir figure 2)

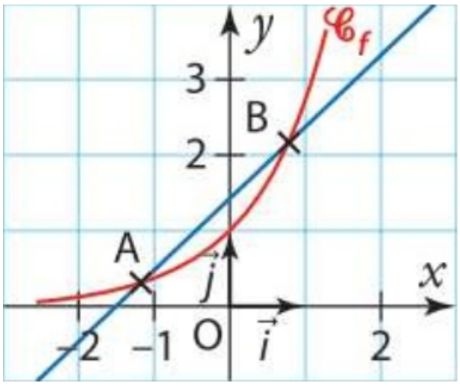

FIGURE 2 – Sécante à une courbe

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
— On dit que f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de toutes ses sécantes.
— On dit que f est concave sur I si, sur l'intervalle I, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de toutes ses sécantes.

Exemples : 1. La fonction carrée $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (voir figure 3).

2. La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;+\infty[$ (voir figure 4).

3. La fonction inverse $x \to \dfrac{1}{x}$ est concave sur sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$ (voir figure 5).

4. La fonction exponentielle $x \to \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (voir figure 6).

Remarque : Si la fonction f est dérivable sur I, on a alors le résultat suivant :
— f est convexe sur I si et seulement si, sur l'intervalle I, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
— f est concave sur I si et seulement si, sur l'intervalle I, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercices : 9, 10 page 145 ; 29 page 153 ; 65 page 155 ; 66, 68 page 156 [14] – 69, 70 page 156 [15] [Magnard]

8. Dérivé de fonctions composées.
9. Étudier les variations d'une fonction composée.
10. Composition avec l'opposé.
11. Étudier une fonction composée.
12. Des composées particulières.
13. Étude d'une fonction à paramètre.
14. Lire la convexité sur un graphique.
15. Démontrer des inégalités en utilisant la convexité.

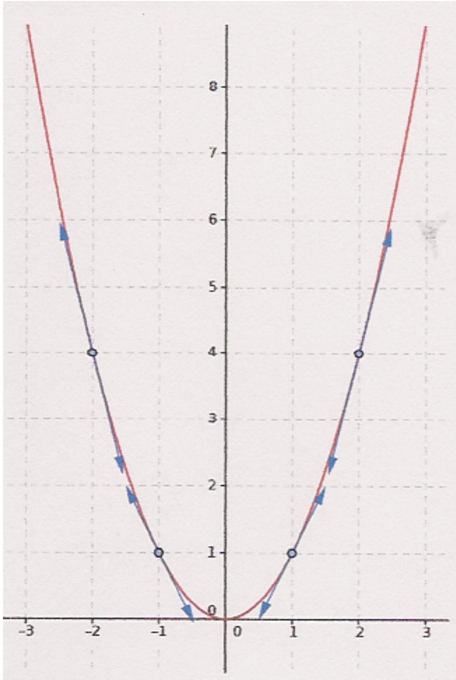

FIGURE 3 – La fonction carrée

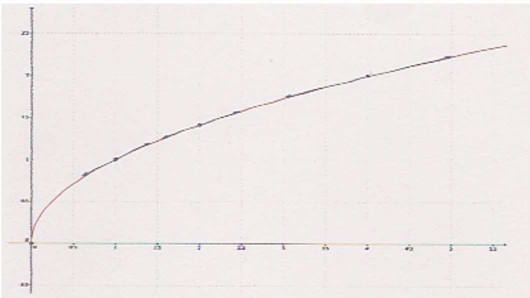

FIGURE 4 – La fonction racine carrée

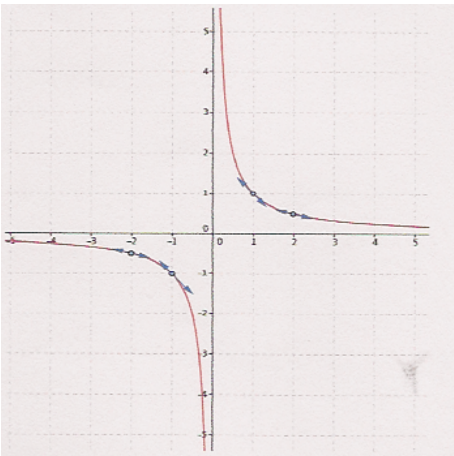

FIGURE 5 – La fonction inverse

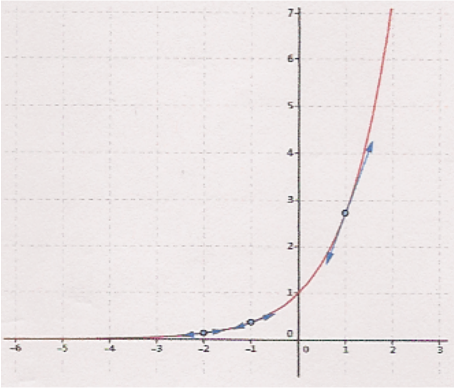

FIGURE 6 – La fonction exponentielle

3.2 Point d'inflexion

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.
On dit que le point $A\ (a\,;\ f\,(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, en A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

Exemple : La fonction cube $x \to x^3$ admet un point d'inflexion en l'origine O du repère (voir figure 7). Elle est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

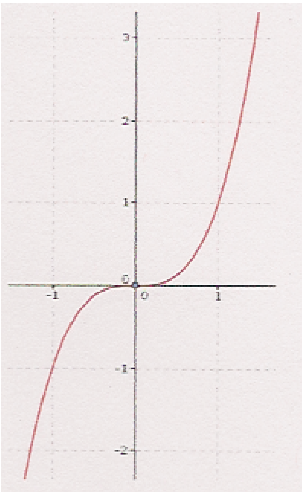

FIGURE 7 – La fonction cube

Remarque : En l'abscisse a du point d'inflexion, la courbe $\mathcal{C}$ passe de concave à convexe ou de convexe à concave.

Exercices : 17, 18 page 149 et 81, 82 page 157[16] [Magnard]

16. Lire les points d'inflexion sur une courbe.

3.3 Inégalités liées à la convexité

Propriété :
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors, pour tour $x, y \in I$ et $t \in [0\,;\,1]$:

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq tf\left(x\right) + (1-t)\,f\left(y\right)$$

- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors, pour tour $x, y \in I$ et $t \in [0\,;\,1]$:

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \geq tf\left(x\right) + (1-t)\,f\left(y\right)$$

Remarque : pour comprendre cette propriété, on se référera à la figure 8 et aux explications suivantes :

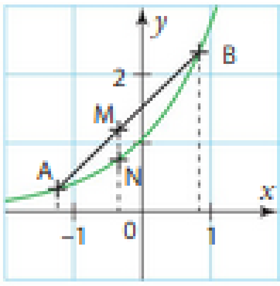

FIGURE 8 – Inégalités et convexité

- A est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x. On a donc $A\,(x\,;\,f\,(x))$;
- B est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x. On a donc $B\,(y\,;\,f\,(y))$;
- M est un point de sécante (AB) à la courbe $\mathcal{C}$. On admettra que ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme donc $M\,(tx + (1-t)\,y\,;\,tf\,(x) + (1-t)\,f\,(y))$;
- N est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse $tx+(1-t)\,y$. On a donc $N\,(tx + (1-t)\,y\,;\,f\,(tx + (1-t)\,y))$;
- Comme f est convexe, N est au-dessous de M donc $f\,(tx + (1-t)\,y) \leq tf\,(x) + (1-t)\,f\,(y)$.

Exercices : 11, 12 page 145 [17] [Magnard]

4 Convexité et dérivées

Activité : Activité 4 page 139 [18] [Magnard]

4.1 Convexité et sens de variation de f'

Théorème : (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Exercices : 13, 14 page 147 et 73, 74, 75 page 156 [19] [Magnard]

17. Démontrer des inégalités en utilisant la convexité.
18. Voir le lien entre courbes, sécantes et tangentes.
19. Lien entre convexité et variations de f'

4.2 Convexité et signe de f''

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée f' de f est elle aussi dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f' sur I.
f'' est appelée dérivée seconde de f.

Exemples : 1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
$f'(x) = 6x - 3$
$f''(x) = 6$

2. $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$
$f'(x) = \mathrm{e}^x - 2$
$f''(x) = \mathrm{e}^x$

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
— f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
— f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

Remarque : Ce théorème est une conséquence directe de celui du 4.1.

Exercices : 15, 16 page 147 ; 76, 77, 79, 80 page 157 ; 93, 95, 97 page 158 ; 106, 107 page 159 ; 131 page 163 et 146 page 165 [20] – 135, 136 page 164 [21] – 23, 24 page 151 [22] [Magnard]

4.3 Point d'inflexion et dérivée seconde

Théorème : (admis)
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point $A\ (a\,;\, f(a))$ si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a, c'est-à-dire que f' change de variation en a.

Exercices : 19, 20 page 149 ; 83, 85 page 157 ; 98, 101, 102 page 159 ; 129 page 163 et 145, 148 page 165 [23] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, Magnard, 2020

3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11

20. Lien entre convexité et signe de f''
21. Dérivée n-ième d'une fonction.
22. Utiliser la convexité pour résoudre un problème.
23. Déterminer algébriquement un point d'inflexion.