Dénombrement

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

1 Les ensembles finis **2**

1.1 Un peu de vocabulaire 2

1.2 Premiers résultats de dénombrement 3

2 Dénombrement sur des listes **3**

2.1 Liste avec répétitions 3

2.2 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments 3

2.3 Permutations d'un ensemble 4

2.4 Liste sans répétition 4

3 Combinaisons **5**

3.1 Définition – Nombre de combinaisons 5

3.2 Quelques propriétés 6

Liste des tableaux

1 Utiliser la calculatrice pour des factorielles. 4

2 Utiliser la calculatrice pour des combinaisons. 6

3 Triangle de Pascal 6

En préliminaire au cours :

Activités : Activités 1 [1] et 2 [2] page 336 [Magnard]

1 Les ensembles finis

1.1 Un peu de vocabulaire

Définition : On dit qu'un ensemble est fini s'il possède un nombre fini d'éléments.

Exemples :

1. L'ensemble $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$ est fini.
2. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $[0\,;\,1]$ sont infinis.

Définitions :

— On appelle partie F d'un ensemble E tout ensemble F tel que tous les éléments de F soient aussi des éléments de E.
On dit alors que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.

— On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble des nombres appartenant aux deux ensembles à la fois, c'est-à-dire à l'ensemble A *et* à l'ensemble B.
Cet ensemble est noté $A \cap B$. Le symbole $\cap$ se lit « inter ».

— On appelle réunion ensembles A et B l'ensemble des nombres appartenant à l'un au moins des deux ensembles c'est-à-dire à l'ensemble A *ou* à l'ensemble B.
Cet ensemble est noté $A \cup B$. Le symbole $\cup$ se lit « union ».

Exemples : Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;d\,;\,e\,;f\,;g\}$ un ensemble.

$A = \{a\,;\,b\,;\,d\,;f\}$; $B = \{b\,;\,c\,;\,d\,;\,e\}$; $C = \{c\,;\,e\}$ et $D = \varnothing$ sont des parties de E.

— $A \cap B = \{b\,;\,d\}$ et $A \cup B = \{a\,;\,b\,;\,c\,;d\,;\,e\,;f\}$

— $A \cap C = \varnothing$. On dit que A et C sont disjoints.

— $C \subset B$.

Remarques :

1. $\varnothing$ et E sont aussi des parties de l'ensemble E.
2. Une partie à 1 élément est appelé singleton.
3. Une partie à 2 éléments est appelé une paire.
4. Il n'y a pas de notion d'ordre pour une partie d'un ensemble. Par exemple, $\{a\,;\,b\} = \{b\,;\,a\}$.
5. Les éléments sont tous distincts. La notation $\{a\,;\,a\}$ n'a pas de sens.

Définition : On appelle p-uplet ou p-liste d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas éléments, coordonnées ou termes.
Un p-uplet s'écrit avec des parenthèses.

Exemples : Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;d\,;\,e\,;f\,;g\}$ un ensemble.

— $(a\,,\,b)$; $(c\,,\,d)$ et $(c\,,\,g)$ sont des 2-uplets, aussi appelés couples.

— $(c\,,\,e\,,\,a)$ est un 3-uplet ou triplet.

Remarque :

1. Cette fois, l'ordre intervient : $(a\,,\,b) \neq (b\,,\,a)$;
2. Les objets peuvent être identiques : le couple $(a\,,\,a)$ existe.

Définition : Produit cartésien
Soit E et F deux ensembles.
L'ensemble $E \times F$, appelé produit cartésien, est l'ensemble des couples $(x\,,\,y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Exemples :

1. Si $E = \{1\,;\,2\,;3\}$ et $F = \{a\,;\,b\}$ alors :

$$E \times F = \{(1\,,\,a)\ ;\ (1\,,\,b)\ ;(2\,,\,a)\ ;\ (2\,,\,b)\ ;(3\,,\,a)\ ;\ (3\,,\,b)\}$$

1. Construire des ensembles avec un ensemble.
2. Construire des p-listes avec un ensemble

2. Pour noter des coordonnées dans un repère du plan, on a $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ou plus simplement $(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Pour noter des coordonnées dans un repère de l'espace, on a $(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ou plus simplement $(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercices : 1, 2 page 339 et 26, 27, 28 page 348 [3] [Magnard]

1.2 Premiers résultats de dénombrement

Dénombrer, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. Depuis le collège, différentes techniques de dénombrement ont déjà été vues : tableau double-entrée, diagramme de Venn, arbres...

On peut ajouter les deux résultats suivants :

Propriété : Principe additif et multiplicatif
Soit E un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments.
Principe additif : Si E et F sont disjoints, alors l'ensemble $E \cup F$ contient $n + p$ éléments.
Principe multiplicatif : L'ensemble $E \times F$ contient $n \times p$ éléments.

Exercices : 3, 4 page 339 ; 25 page 347 et 31, 32 page 348 et 67 page 352 [4] - 49, 51 page 350 et 65 page 352 [5] – 50, 53 page 350 et 66 page 352 [6] – 13, 14 page 344 et 23 page 347 [7] – 43 page 349 [8] [Magnard]

2 Dénombrement sur des listes

Activité : 3 page 337 [9] [Magnard]

2.1 Liste avec répétitions

Théorème : Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier naturel non nul.
Le nombre p-uplets de E est n^p.

Remarque : Autrement dit, l'ensemble E^p comporte n^p éléments.

Exemple : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et à chaque lancer, on note P pour « Pile » et F pour « Face ».
On a $E = \{\mathrm{P}\,;\,\mathrm{F}\}$ et chaque série de trois lancer est un triplet (*d'éléments non distincts*) de E^3. Par exemple, (P,P,F), (F,P,P), (P,F,F), etc.
Le nombre de séries de trois lancers est $2^3 = 8$.

Remarque : Le cas typique d'application de ce théorème est celui d'un tirage successif [10] avec remise [11] de p boules parmi n.

Exercices : 34, 35 page 348 et 36, 37 page 348 [12] [Magnard]

2.2 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Théorème : Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

3. Utiliser le vocabulaire.
4. Utiliser un diagramme de Venn.
5. Utiliser un arbre.
6. Utiliser un tableau double-entrée.
7. Choisir une représentation adaptée.
8. Utilisation du principe multiplicatif.
9. Construire des arbres.
10. pour avoir un ordre.
11. pour avoir toutes les listes possibles, avec éventuellement des répétitions.
12. Tirages successifs avec remise.

Démonstration :
On note $E = \{e_1 \,;\, e_2 \,;\, e_3 \,;\, \ldots ;\, e_n\}$.
À chaque partie de E, on associe un n-uplet de l'ensemble $\{0\,;\,1\}$ en utilisant la règle suivante :
« Si e_i est dans la partie de E considéré, le i-ème terme du n-uplet sera 1. Sinon, il sera 0. »
On associe ainsi par exemple la partie $\{e_1 \,;\, e_3\}$ au n-uplet $(1\,,\,0\,,\,1\,,\,0\,,\ldots,\,0)$.
Déterminer le nombre de parties de E revient donc à déterminer le nombre de n-uplets de l'ensemble à 2 éléments $\{0\,;\,1\}$, c'est donc 2^n.

2.3 Permutations d'un ensemble

Définition : Soit E un ensemble fini de n éléments.
On appelle permutation de E toute liste des n éléments distincts de E.

Remarque : Il s'agit donc de n-uplets de E, avec des éléments tous distincts.

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
On appelle factorielle n et on note $n!$ le nombre suivant :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention, on prendra $0! = 1$.

Remarque On peut utiliser la calculatrice pour déterminer des factorielles. Voir le tableau 1.

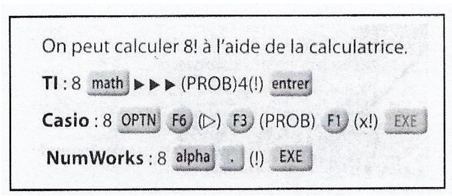

TABLE 1 – Utiliser la calculatrice pour des factorielles.

Exercices : 18, 19, 24 page 347 [13] [Magnard]

Théorème : Soit E un ensemble fini de n éléments.
Le nombre de permutations de E est $n!$.

Exemple : On classe cinq concurrents sans ex-aequo.
On a $E = \{A\,;\,B\,;\,C\,;\,D\,;\,E\}$ chaque tirage correspond à une liste des 5 éléments de E. Par exemple $(B\,;\,C\,;\,A\,;\,E\,;\,D)$.
Le nombre classements différents est $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Remarque : Le cas typique d'application de ce théorème est celui d'un tirage successif [14] sans remise [15] des n boules d'un sac.

Exercices : 39, 41, 42, 45 page 349 [16] [Magnard]

2.4 Liste sans répétition

Théorème : Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.
Le nombre de listes de p éléments distincts de E est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

13. Calculer avec des factorielles.
14. pour avoir un ordre.
15. pour ne garder que les listes sans répétitions.
16. Permutations d'un ensemble.

Exemple : On tire sans remise 3 boules dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5.
On a $E = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$ et chaque tirage correspond à une liste de 3 éléments de E (*tous distincts*). Par exemple, $(2\,,\,5\,,\,3)$, $(1\,,\,4\,,\,2)$, etc.
Le nombre de tirages successifs sans remise de 3 boules parmi 5 est :

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

.

Remarque : Le cas typique d'application de ce théorème est celui d'un tirage successif[17] sans remise[18] de p boules parmi n.

Exercices : 38, 40, 44 page 349[19] – 5,6, 7, 8 page 341 ; 68, 69, 70 page 352[20] [Magnard]

3 Combinaisons

3.1 Définition – Nombre de combinaisons

Définition 1 : Soit E un ensemble fini de n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E contenant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$, ce qui se lit « p parmi n ».

Remarque : Contrairement aux listes, il n'y a pas de notion d'ordre pour les combinaisons. Par exemple, si $E = \{a\,;\,b\,;\,c\,;\,d\,;\,e\}$, la combinaison $\{a\,;\,b\,;\,c\}$ peut aussi s'écrire $\{a\,;\,c\,;\,b\}$ ou $\{b\,;\,c\,;\,a\}$.

Exemples :

- $\binom{n}{0} = 1$, car il y a une seule partie d'un ensemble E à zéro élément (l'ensemble vide) ;
- $\binom{n}{n} = 1$, car il y a une seule partie d'un ensemble E à n élément (l'ensemble E lui-même) ;
- $\binom{n}{1} = n$, car il y a n parties d'un ensemble E à 1 élément ;
- $\binom{n}{n-1} = n$, car il y a n parties d'un ensemble E à $(n-1)$ éléments.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Remarques : Le cas typique d'application de ce théorème est celui d'un tirage simultané[21] de p boules parmi n.

Exemple : Le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments est :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Remarque : On peut utiliser la calculatrice pour calculer un nombre de combinaisons. Voir le tableau 2.

Exercices : 20 page 347[22] – 9, 10, 11, 12 page 343[23] – 53, 54, 55, 57 page 350 ; 58, 60 page 351[24] – 71, 72, 74, 75 page 352 et 76 page 352[25] [Magnard]

17. pour avoir un ordre.
18. pour ne garder que les listes sans répétitions.
19. Tirages successifs sans remise.
20. Choisir une formule adaptée.
21. pour ne pas avoir d'ordre.
22. Calculer avec des combinaisons.
23. Dénombrer avec des combinaisons.
24. Tirages simultanés.
25. Choisir une formule adaptée.

On peut utiliser la calculatrice pour calculer un nombre de combinaisons, par exemple $\binom{10}{5}$.

TI : 10 math ▶▶▶ (PROB) 3 (Combinaison) 5 entrer

Casio : 10 OPTN F6 (▷) F3 (PROB) F3 (nCr) 5 EXE

NumWorks : Dénombrement ▷ binomial(n,k) EXE 10▽5 EXE.

$\binom{10}{5}$ 252

TABLE 2 – Utiliser la calculatrice pour des combinaisons.

3.2 Quelques propriétés

Propriété 1 : Soit n un entier naturel.

1. Si p est un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

2. Si p est un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n-1$:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration :

1. $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$

2. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$

Or, $p! = p \times (p-1)!$ et $(n-p)! = (n-p) \times (n-p-1)!$

Le dénominateur commun est donc $p!\,(n-p)!$

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p\,(n-1)! + (n-p)\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!}\\ &= \frac{[p+(n-p)]\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!}\\ &= \frac{n\,(n-1)!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}\end{aligned}$$

Exemple : $\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$

Remarque : En particulier, la deuxième formule permet de calculer $\binom{n}{p}$ de proche en proche. Les résultats sont détaillés dans le tableau 3, appelé triangle de PASCAL.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

TABLE 3 – Triangle de PASCAL

Propriété 2 : Soit n un entier naturel.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Démonstration :
On a déjà vu que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.
Or, le nombre de parties à 0 élément est $\binom{n}{0}$, le nombre de parties à 1 élément est $\binom{n}{1}$, et plus généralement le nombre de parties à k éléments est $\binom{n}{k}$.
En faisant la somme de toutes ces parties, on retrouve toutes les parties de l'ensemble E donc :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Exercices : 77, 78, 80 page 353[26] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

2, 3, 4, 5, 7

26. Quelques démonstrations