# Fonctions : Limites et asymptotes

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

## Table des matières

# Table des figures



# Liste des tableaux

# 1 Limite à l'infini

## 1.1 Limite infinie en $+\infty$, en $-\infty$

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.
On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (voir figure 1).
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

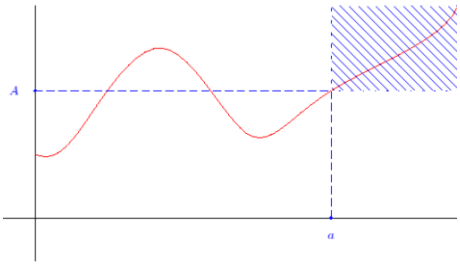


FIGURE 1 – Limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$

**Remarque :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

**Cas des fonctions usuelles :**
- Les fonctions $x \longrightarrow x^2$ , $x \longrightarrow \sqrt{x}$ , $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier strictement positif) ont comme limite $+\infty$ en $+\infty$.
- La fonction exponentielle $x \longrightarrow e^x$ a comme limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \longrightarrow x^2$ , $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier pair, non nul) ont comme limite $+\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \longrightarrow x^n$ ($n$ entier impair) ont comme limite $-\infty$ en $-\infty$.

## 1.2 Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$ – Asymptote horizontale

**Définition :** Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$ et $l$ un nombre réel.
On dit que $f$ a comme limite $l$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (voir figure 2).
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \qquad \text{ou} \qquad \lim_{+\infty} f = l$$

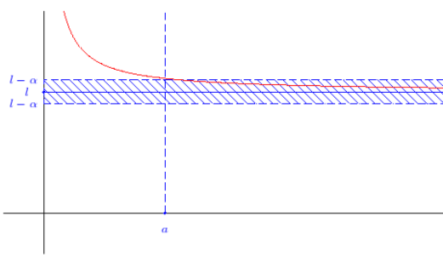


FIGURE 2 – Limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$

**Remarques :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ .

**Définition :** Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentant $f$.

**Remarque :** Graphiquement, ceci signifie que la courbe représentant $f$ se rapproche de plus en plus de cette droite lorsque $x$ devient grand [1] (voir figure 2).

**Cas des fonctions usuelles :**
- Les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ , $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ , $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier strictement positif) ont comme limite $0^+$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier pair, non nul) ont comme limite $0^+$ en $-\infty$.
- Les fonctions$x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$ ($n$ entier impair, non nul) ont comme limite $0^-$ en $-\infty$.
- La fonction exponentielle $x \longrightarrow \mathrm{e}^x$ a comme limite $0^+$ en $-\infty$.

**Remarques :** 1. « $0^+$ » signifie que la fonction tend vers zéro tout en restant plus grande que zéro.

2. Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des abscisses comme asymptote.

**Exercices :** 2 page 53 et 33, 34 page 64 [2] [Magnard]

## 2 Limite infinie en un réel $a$

**Définition :** Soit $a$ un réel et $f$ une fonction définie au voisinage de $a$ (mais pas nécessairement en $a$). On dit que $f$ a comme limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ si, pour tout nombre $A$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$ (voir figure 3).
On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{a} f = +\infty$$

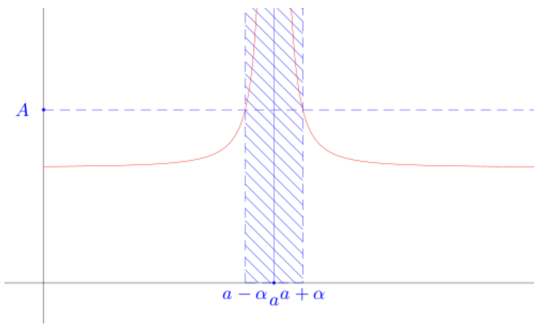


FIGURE 3 – Limite infinie lorsque $x$ tend vers le réel $a$

**Remarque :** On peut définir de manière analogue $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty$.

**Définition :** Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à la courbe représentant $f$(voir figure 3).

**Cas des fonctions usuelles :**
- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$
- Pour $x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- Plus généralement :

1. éventuellement négatif et grand en valeur absolue pour l'asymptote en $-\infty$.
2. Conjecturer une limite en l'infini.

— si $n$ entier pair non nul , $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ ;

— si $n$ entier impair, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

**Remarque :** Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote.

**Exercices :** 3, 5, 6 page 55 et 36, 38 page 64 [3] – 24 page 63 ; 39 page 64 et 40, 41 page 65 [4] – 31, 32 page 64 [5] [Magnard]

# 3 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, $l$ et $l'$ désignent deux nombres réels ; $a$ désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

## 3.1 Somme de deux fonctions

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. |

Table 1 – Limite d'une somme

**Remarque :** « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

**Exemple :** $\lim_{x\to-\infty} x^2 + \mathrm{e}^x = ?$
On a $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} x^2 + \mathrm{e}^x = +\infty$.

**Exercices :** 10 (1.) page 57 et 42 (a et b), 43 (a et b), 45 (a) page 65 [6][Magnard]

## 3.2 Produit de deux fonctions

### 3.2.1 Limite d'un produit

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

**Exemple :** $\lim_{x\to+\infty} \left(-2x+1+\frac{3}{x}\right)\mathrm{e}^x = ?$
On a $\lim_{x\to+\infty} -2x+1 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} -2x+1+\frac{3}{x} = -\infty$.
De plus, $\lim_{x+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \left(-2x+1+\frac{3}{x}\right)\mathrm{e}^x = -\infty$.

**Exercices :** 10 (2.) page 57 et 42 (c), 43 (c), 45 (c) page 65 et 69 (a et b) page 67 [7] [Magnard]

3. Conjectures à partir d'un graphique ou d'un tableau de valeurs.
4. Notion d'asymptote.
5. Tracer une allure de courbe.
6. Limite d'une somme.
7. Limite d'un produit.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. | F.I. |
| | | Il s'agit de la règle des signes | | | | | | | | |

TABLE 2 – Limite d'un produit

### 3.2.2 Application : limite en l'infini d'une fonction polynôme

**Exemple :** $f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$

On a une forme indéterminée en $-\infty$ et en $+\infty$.

Si $x \neq 0$ :

$$f(x) = x^4\left(-3 + \frac{x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) = x^4\left(-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) = -3\end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

**Remarques :** 1. On a un résultat analogue lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2. On peut remarquer que la limite est la même que celle de $-3x^4$. Ce résultat se généralise.

> **Propriété :** (Hors-Programme)
> En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

**Remarque :** Ce résultat n'est valable *que* pour les fonctions polynômes et *uniquement* pour l'étude des limites en l'infini.

**Exercices :** 16 (a et c), 17 (a et c), 18 page 60 et 61 page 66 [8] – 74 page 67 et 78 page 68 [9] [Magnard]

## 3.3 Inverse d'une fonction

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ et $f(x)>0$ | $0$ et $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ | $\frac{1}{l}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

TABLE 3 – Limite de l'inverse

**Remarque :** Lorsque $f(x)$ tend vers zéro, il est *nécessaire* de connaître le signe de $f$ pour conclure. Par contre, dans la plupart des cas, ce n'est *pas du tout* une forme indéterminée.

**Un cas particulier important :** La fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$,on a les résultats suivants :

8. Fonctions polynômes.
9. Lever une indétermination par factorisation.

— $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$ , c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0^+$ ;
— $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$ , c'est-à-dire $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

**Exemples :**

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} =?$
   $\lim_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$.
   On a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
2. $\lim_{x\to1} \frac{1}{x^2-1} =?$
   Comme $\lim_{x\to1} x^2 - 1 = 0$, il est nécessaire de connaître le signe de $\left(x^2 - 1\right)$ pour conclure. Il s'agit d'un trinôme du second degré, avec deux racines évidentes : $-1$ et $1$. De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif. Le signe est donc le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   On a donc :
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$
   On a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

**Remarques :** 1. Attention ! La notation $\lim_{\substack{x\to1\\x<-1}} \frac{1}{x^2-1}$ n'a aucun sens. Il suffit de connaître le signe de $\left(x^2 - 1\right)$ au *voisinage* de 1 pour conclure.
2. Par un raisonnement analogue, on trouve :
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

**Exercices :** 7 (e), 10 (3.) page 57 ; 44 (a et c), 46 (b et c) page 65 et 69 (c), 71 (b) page 67 [10] – 70, 72 (b), 73 et 75 page 67 [11] [Magnard]

## 3.4 Quotient de deux fonctions

### 3.4.1 Limite d'un quotient

On peut remarquer que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$. On peut donc trouver la limite d'un quotient à l'aide des tableaux 2 et 3.
Les résultats sont résumés dans le tableau 4.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ | $0$ | $l' \neq 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | F.I. | F.I. |
| | | | Il faut étudier le signe de $g$ | | règle des signes | | |

Table 4 – Limite d'un quotient

10. Inverse d'une fonction.
11. Avec $\mathrm{e}^{-x}$.

**Exemples :** 1. $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x-2}{3x-1} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to\frac{1}{3}} x-2 = -\frac{5}{3}\\ \lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x-1 = 0\end{array}\right\}\text{ il faut étudier le signe de } 3x-1$$

le signe est résumé dans le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

. Par suite, comme la limite du numérateur est négative, on a :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = -\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{3}$.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 0} x^2-3 = -3\\ \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \text{ et } {\color{red}\sqrt{x} > 0}\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to 0} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = -\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x^2-3 = +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ On a une forme indéterminée}$$

De plus :

$$\frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{x\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = +\infty$$

**Exercices :** 8 (b et c) page 57 ; 43 (d), 44 (d), 45 (b et c), 46(d) page 65 ; 71 (c et d), 72 (c et d) et 76 page 64 [12] [Magnard]

### 3.4.2 Application : limite en l'infini d'une fonction rationnelle

**Exemple :** $h(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x+2}$
On a une forme indéterminée lorsque $x$ tend vers $+\infty$.
Si $x \neq 0$ :

$$h(x) = \frac{x^2\left(3 - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 3\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{x\to+\infty} x\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

**Remarque :** On peut remarquer que la limite est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré. Ce résultat se généralise.

**Propriété :** (Hors-Programme)
En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

12. Quotient de deux fonctions.

**Remarques :** Ce résultat n'est valable *que* pour les fonctions rationnelles et *uniquement* pour l'étude des limites en l'infini.

**Exercices :** 10 (4.) page 57 ; 17 (b et d) page 60 ; 79, 83, 89 page 68 [13] – 57, 58 page 66 et 82 page 68 [14] – 98, 99, 100 page 69 [15] – 104 page 70 [16] [Magnard]

# 4 Théorèmes de comparaison

## 4.1 Théorème « des gendarmes »

**Théorème :** Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $]A\,;+\infty[$ et $l$ un réel.
Si, pour $x\in I$ , on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

**Remarque :** On a un théorème analogue lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

**Exemple :** Détermination de la limite en l'infini de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc, si $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
De même, si $x < 0$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$, on aboutit donc à : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

**Exercices :** 12(b et c), 13 (b,c et d) page 59 ; 50 page 65 [17] [Magnard]

## 4.2 Théorème de majoration et de minoration

**Théorème :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $]A\,;+\infty[$.

1. Si, pour $x\in I$, on a $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. Si, pour $x\in I$, on a $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

**Remarque :** On a un théorème analogue lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

**Exemple :** Détermination de la limite en $+\infty$ de $f(x) = x + \cos x$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
Or, $\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Remarque :** De même, en utilisant $f(x) \leq x + 1$ et que $\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$, on peut déduire que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**Exercices :** 12 (a), 13 (a) page 59 ; 48, 49 page 65 et 90 page 69 [18] [Magnard]

## 4.3 Croissance comparée de $\mathrm{e}^x$ et $x^n$

**Lemme :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > x$.

**Démonstration :**
Soit $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.
$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, on sait que $\mathrm{e}^x > 1$ dès que $x > 0$.
On obtient le tableau de variations suivant :

13. Fonctions rationnelles et exponentielle.
14. Autres formes indéterminées.
15. Étude de fonctions.
16. Suite de fonctions.
17. Théorème « des gendarmes ».
18. Théorèmes de comparaison

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ soit $\mathrm{e}^x > x$.

**Propriété :** Croissance comparée de $\mathrm{e}^x$ et de $x$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

**Démonstration :**

Soit $x$ un réel strictement positif.

Comme $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\times\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^x$, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

Or, on a vu que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^X > X$.

En particulier, on a $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$ et donc, comme $\sqrt{x} > 0$ :

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Tous les nombres étant positifs, le passage au carrée conserve l'ordre donc :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} > \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = \frac{x}{4}$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

**Remarques :** Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$. (Pour une idée de la démonstration, voir page 62 [Magnard]).

**Exercices :** 120 page 73 [19] – 146 page 77 [20] [Magnard]

# 5 Limite d'une fonction composée

## 5.1 Limite de la composée de deux fonctions

**Théorème :** (admis)

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$.

$a$, $b$ et $c$ désignent soit des nombres, soit $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x\longrightarrow a} h(x) = b$ et $\lim_{x\longrightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = c$.

**Remarques :**
1. Ce résultat est intuitif : il faut étudier la limite de la deuxième fonction à l'endroit où « arrive » la première.
2. On rédigera souvent l'utilisation de ce théorème comme un changement de variable (voir exemples).

**Exemple :** Étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

On pose $X = x^2 + x$. On a alors $f(x) = \sqrt{X}$.

Or, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X\longrightarrow+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.

**Exercices :** 14, 15 page 59 ; 52, 53, 54 page 66 et 95 page 69 [21] [Magnard]

**Module :** Exercice résolu page 61 puis exercices 20, 21, 22, 23 page 61 [22] [Magnard]

19. Croissance comparée.
20. Fonction exponentielle.
21. Composition de fonctions.
22. Utilisation d'une forme conjuguée.

### 5.2 Application : la limite en $-\infty$ de $x^n e^x$

**Propriété :** On a :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

**Démonstration :**
On pose $X = -x$. On a donc $x = -X$ et $xe^x = -Xe^{-x} = -\dfrac{X}{e^X}$.
On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} X = +\infty$ et, comme $\dfrac{X}{e^x} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{X}}$ et $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$, on a $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.
Par composition, on a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

**Remarque :** Par un raisonnement analogue, on peut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

**Exercices :** 94 page 69 [23] – 147 page 77 [24] [Magnard]

### 5.3 Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

**Théorème :** (admis)
Soit $f$, $g$ et $h$ une fonctions définie sur un intervalle $I$.
Soit $(u_n)$une suite dont tous les termes appartiennent à $I$.
$b$ et $c$ désignent soit des nombres, soit $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = b$ et $\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = c$ alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = c$.

**Exemple :** Étudier la limite en $+\infty$ de $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.
On montre facilement que $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$.
Comme $\lim_{X \longrightarrow 3} \sqrt{X} = \sqrt{3}$ donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

**Exercices :** 55, 56 page 66 [25] [Magnard]

# Références

[Magnard] Maths Tle Spécialité, MAGNARD, 2020

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

23. Croissances comparées.
24. Fonction exponentielle.
25. Composée d'une suite et d'une fonction.