Généralités sur les fonctions

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2020/2021

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

---

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/

1 Notion de fonction

Activité : Activité 1[1] de la feuille polycopiée.

Définition : Définir une fonction f d'un ensemble $\mathcal{D}$ de réels dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de $\mathcal{D}$ un unique réel noté $f(x)$.

— On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f.
— $f(x)$ est l'image de x par f.
— x est *un* antécédent de $f(x)$ par f.

Cette situation est résumée sur la figure 1.

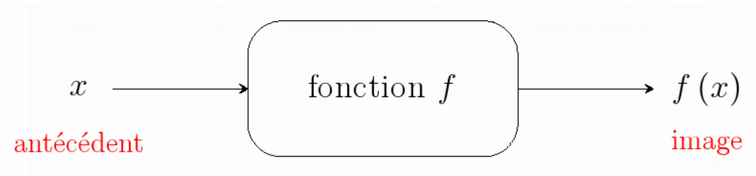

FIGURE 1 – Schéma 1

Notation : On peut noter :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Ce qui se lit : « *la fonction f qui à x associe $f(x)$* ».

Exemple : Dans l'activité 1

— La fonction est $f : x \longrightarrow \sqrt{10x - x^2}$.
— Son ensemble de définition est l'intervalle $[0\,;10]$.
— L'image de 1 par f est 3. On note $f(1) = 3$.
— L'image de 10 par f est 0. On note $f(10) = 0$.
— Les antécédents de 0 par f sont 0 et 10 car ce sont les seules valeurs de x telles que $f(x) = 0$.
— Les antécédents de 3 par f sont 1 et 9 car ce sont les seules valeurs de x telles que $f(x) = 3$.
— 6 n'a pas d'antécédent par f car, pour tout $x \in [0\,;10]$, $f(x) \leq 5$.

Remarques :

1. Le nombre x ne peut avoir *qu'une seule image* par la fonction f (voir définition), mais un nombre y peut avoir *plusieurs antécédents*, voire aucun.

2. S'il n'est pas donné, l'ensemble de définition d'une fonction peut être déterminé en analysant son expression pour déterminer les valeurs de x conduisant à des opérations interdites (division par zéro, racine carrée d'un nombre négatif) ou par analyse du contexte donnant cette fonction.

Exercices : 58, 59 page 203 et 65 page 203[2] – 61, 63 page 203[3] [Magnard]

1. D'une situation géométrique au fonctions.
2. Ensemble de définition
3. Modélisation d'une fonction.

Méthode : Soit f la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f\,:\,[-4\,;\,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & -\dfrac{1}{2}x+3 \end{array}$$

— Pour déterminer l'image d'un nombre x par f, il faut que ce nombre soit dans l'ensemble de définition de f. Dans ce cas, on remplace x par ce nombre dans l'expression de $f\,(x)$.

Image de -2 **:** $f\,(-2) = -\frac{1}{2} \times (-2) + 3 = 1 + 3 = 4$

Image de 6 **:** Impossible car $6 \notin [-4\,;\,5]$.

— Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) d'un nombre a par f, il faut résoudre l'équation $f\,(x) = a$.

Antécédents de 1 **:** Il faut résoudre l'équation $f\,(x) = 1$

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{2}x+3 & = & 1 \\ -\dfrac{1}{2}x & = & 1-3 \\ -\dfrac{1}{2}x & = & -2 \\ x & = & \dfrac{-2}{-\frac{1}{2}} = -2 \times (-2) = 4 \end{array}$$

Le seul antécédent de 1 par f sont 4.

Questions flash : 12, 13, 14 page 200 [4] –16 page 200 [5] [Magnard]

Exercices : 23, 25 page 200 [6] – 26, 27, 30 page 200 et 70 page 203 [7] [Magnard]

2 Représentation graphique d'une fonction

2.1 Définition

Activité : TP 1 page 210 [8] [Magnard]

Définition : Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$.
Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.
La représentation graphique ou courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,f\,(x))$, où $x \in \mathcal{D}$.

Remarques :
1. En général, le repère sera orthogonal ou orthonormé.
2. Le tracé d'une courbe représentatif est toujours *approximatif* : on fait un tableau de valeurs (voir exemple), on place les points correspondants dans un repère et on les relie par une courbe régulière (sans utiliser la règle, sauf dans certains cas particuliers).
3. On peut utiliser la calculatrice pour remplir des tableaux de valeurs et tracer des courbes représentatives de fonctions. Voir exercice TP1 page 210 [Magnard].
4. Certaines fonctions ne sont connus que par leur courbe représentative (par exemple, la fonction de l'activité 2).

4. Calcul d'image
5. Recherche d'antécédent
6. Calcul d'image
7. Recherche d'antécédents
8. Tableaux de valeurs, courbes et calculatrices.

Exemple : On va tracer la courbe représentative de la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \dfrac{4x+3}{x^2+1} \end{array}$$

On commence par faire, à l'aide de la calculatrice, un tableau de valeurs. Pour placer des points dans un repère, des valeurs approchées suffisent.

On place les points correspondants dans le repère choisi, et on les joints par une courbe régulière (voir figure 2).

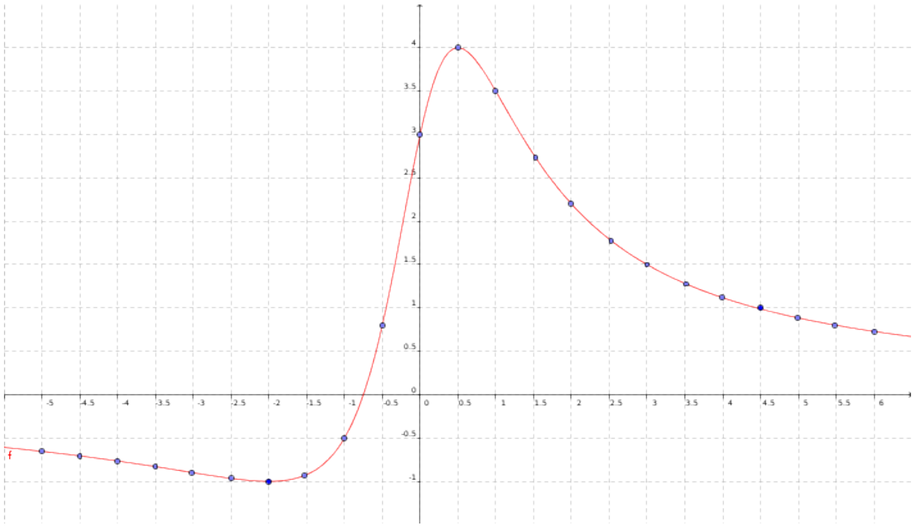

Figure 2 – Exemple de courbe représentative de fonction

Remarques :
1. On peut aussi visualiser la courbe représentative d'une fonction sur l'écran de la calculatrice (voir TP1 page 200).
2. On peut donc compléter le schéma explicatif des fonctions (voir figure 3).

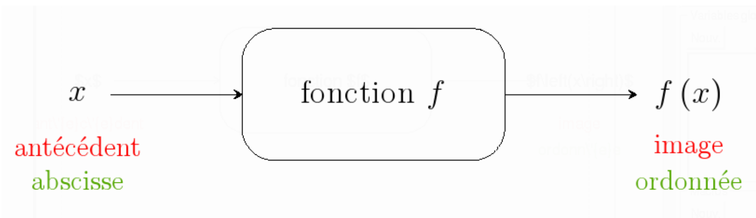

Figure 3 – Schéma 2

Questions flash : 15 page 200[9] – 17, 18 page 200[10] [Magnard]

Exercices : 31, 32, 33, 34 page 201 et 75, 77 page 204[11] – 60 page 203[12] – 62, 64, 69 page 203[13] – 94, 95, 96 page 206[14] [Magnard]

2.2 Déterminer graphiquement une image, un antécédent

Activité : Activité 2[15] de la feuille polycopiée.

9. Utilisation d'un tableau de valeurs
10. Points sur une courbe
11. Points d'une courbe.
12. Ensemble de définition
13. Tableaux de valeurs
14. Modélisation d'une fonction
15. Température en fonction de l'heure.

Méthode : On se reportera à la figure 4.
- L'image de a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.
- Les antécédents de b sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est b.

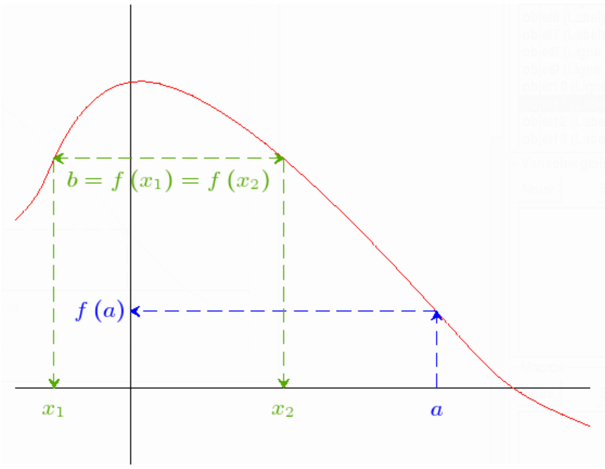

FIGURE 4 – Recherche graphique d'image est d'antécédents

Exercices : 28, 29 page 200 [16] [Magnard]

2.3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Activité : Activité 2 [17] de la feuille polycopiée.

Méthode 1 : Résolution graphique d'équation

Soit f une fonction et k un nombre réel. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère et $\mathcal{D}_k$ la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses).

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_k$.

Exemple 1 : On reprend la courbe de l'activité 2 (température en fonction de l'heure).
- Chercher les heures auxquelles la température est de -2°C revient à résoudre l'équation $f(t) = -2$. On trace sur le graphique la droite d'équation $y = -2$ (voir figure 5). Les solutions sont : $t = 6$, $t = 9$ et $t = 22$.
  La température est donc de -2°C à 6 heures, 9 heures et 22 heures.
- Chercher les heures auxquelles la température est de 7°C revient à résoudre l'équation $f(t) = 7$. On trace sur le graphique la droite d'équation $y = 7$ (voir figure 5). Il n'y a pas de solution.
  La température n'est donc jamais de 7°C.

Méthode 2 : Résolution graphique d'inéquation

Soit f une fonction et k un nombre réel. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère et $\mathcal{D}_k$ la droite d'équation $y = k$ (parallèle à l'axe des abscisses).

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessous de $\mathcal{D}_k$.

Exemple 2 : On reprend la courbe de l'activité 2 (température en fonction de l'heure).

Chercher les heures auxquelles la température est inférieure à 5°C revient à résoudre l'inéquation $f(t) \leq 5$. On trace sur le graphique la droite d'équation $y = 5$ (voir figure 6). Les solutions sont : $t \in [6\,;14]$ et $t \in [18,5\,;22]$. On peut noter $S = [6\,;14] \cup [18,5\,;22]$ (le symbole « $\cup$ » se lit « union », pour plus de détails, voir l'exercice résolu A page 27 [?]).

16. Recherche graphique d'image, d'antécédents
17. Température en fonction de l'heure.

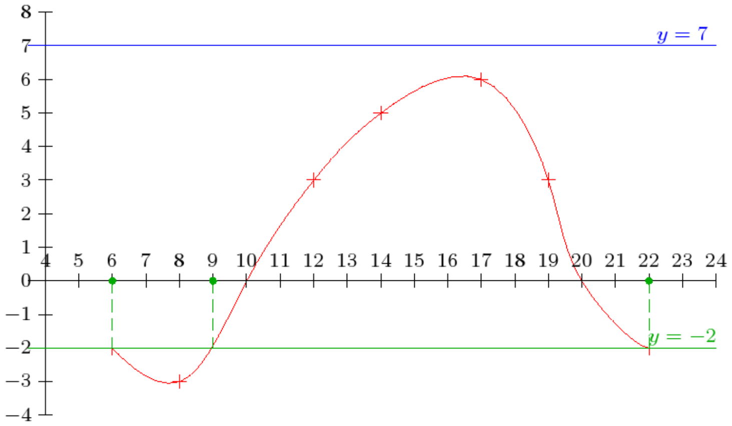

FIGURE 5 – Résolution graphique d'équations

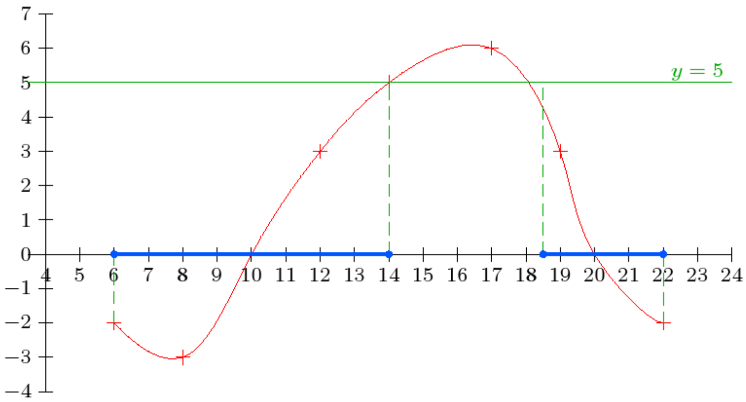

FIGURE 6 – Résolution graphique d'inéquations

La température est donc inférieure à 5°C de 6 heures à 14 heures et de 18 heures 30 à 22 heures.

Remarque : On peut résoudre de façon analogue les inéquations de la forme :

— $f(x) < k$: abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés strictement au-dessous de $\mathcal{D}_k$;
— $f(x) \geq k$: abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au-dessus de $\mathcal{D}_k$;
— $f(x) > k$: abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés strictement au-dessus de $\mathcal{D}_k$.

Exercices : 1, 2, 3 page 197 et 38, 39 page 201 [18] – 4, 5 page 198 et 41, 42 page 201 [19] – 83 page 205 [20] – 84 page 205 [21] – 88 page 205 [22] – 97 page 207 [23] – 102, 103, 104, 105 page 208 [24] [Magnard]

18. Résolution graphique d'équations
19. Résolution graphique d'inéquation
20. Utilisation en chimie
21. Tracé de courbe
22. Valeur approchée d'une solution.
23. Modélisation de fonctions
24. Exercices bilan.

3 Un cas particulier : les fonctions affines

3.1 Définition – Représentation graphique

Définition : Soient m et p deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.

Le coefficient m est appelé coefficient directeur.

Le coefficient p est appelé ordonnée à l'origine.

Remarques : 1. Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine car $f(0) = p$.

2. — Si $m = 0$: $f(x) = p$, on obtient une fonction constante ;
   — Si $p = 0$: $f(x) = mx$, on obtient une fonction linéaire.

Propriété : La représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.
Cette droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Remarque : Pour tracer une droite, il suffit d'avoir deux points. On peut donc limiter, pour une fonction affine, le tableau de valeurs à deux (ou trois) pour tracer la droite représentant une fonction affine. Très souvent, un de ces points sera le point de coordonnées $(0\,;\,p)$.

Cas particuliers : — Si $f(x) = p$ (fonction constante), on obtient une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par l'ordonnée p ;
— Si $f(x) = mx$ (fonction linéaire), on obtient une droite passant par l'origine du repère.

Exercices : 38, 40 page 175 [25] [Magnard]

3.2 Lecture graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

La méthode est basée sur les deux remarques suivantes :

1. la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,p)$;
2. le coefficient directeur est donné par la formule : $m = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Méthode : (voir figure 7)

— Pour déterminer graphiquement le coefficient directeur :
  — on part d'un point de la droite (ici A) ;
  — on avance de Δx unités (horizontalement) et on monte de Δy unités (verticalement) pour se trouver sur un autre point de la droite (ici B).

  Le coefficient directeur est alors :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$

— L'ordonnée à l'origine p est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.

Exemples : 1. Voir figure 8.
On pose $f(x) = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,-1)$ donc $p = -1$.
Partant de ce point, il faut avancer de 1 unité ($\Delta x = 1$) et monter de 2 unités ($\Delta y = 2$) pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$.
La fonction affine tracée est donc : $f(x) = 2x - 1$.

2. Voir figure 9.
On pose $f(x) = mx + p$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ donc $p = 2$.
Partant de ce point, il faut avancer de 2 unités ($\Delta x = 2$) et descendre de 1 unité ($\Delta y = -1$) pour se trouver sur un autre point de la droite. On a donc : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.
La fonction affine tracée est donc : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

25. Tracé de droites.

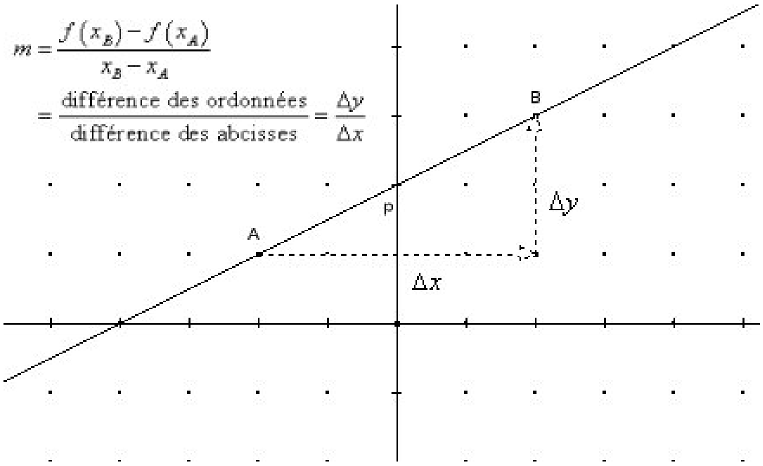

FIGURE 7 – Détermination graphique d'une fonction affine

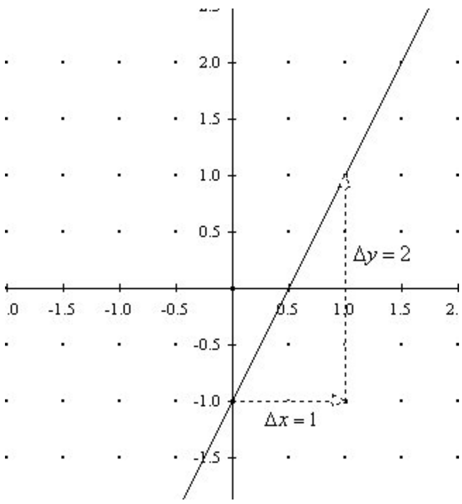

FIGURE 8 – Premier exemple de détermination graphique.

Remarques : Cette méthode permet aussi de tracer rapidement la représentation graphique d'une fonction affine connue.

Exercices : 42, 43, 44 page 175 [26] – 38, 40 page 175 [27] – 86, 87 page 205 [28] – 96 page 206 et 98 page 207 [29] [Magnard]

Références

[Magnard] Maths 2$^{\text{de}}$, MAGNARD, 2019

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

26. Lectures graphiques du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.
27. Tracé de droites - Méthode 2.
28. D'une résolution graphique à une résolution algébrique
29. Problèmes.

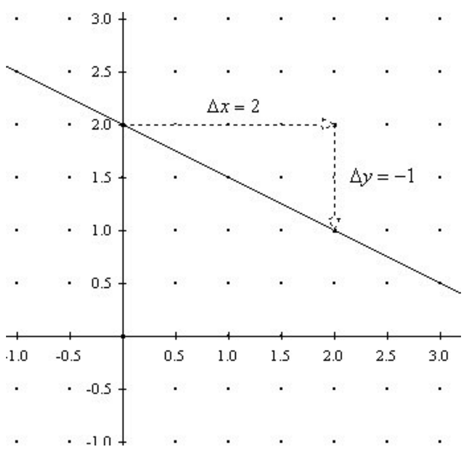

FIGURE 9 – Deuxième exemple de détermination graphique.